

Encuentro de geometría de foliaciones y singularidades 12,13 y 14 de octubre del 2022

Auditorio Alfonso Nápoles Gándara, Instituto de Matemáticas de la UNAM

Título y resumen de las pláticas

- **Adolfo Guillot Santiago**, Instituto de Matemáticas, UNAM

Estructuras proyectivas foliadas.

Las curvas complejas tienen siempre estructuras proyectivas, conjuntos de cartas en los que los cambios de coordenadas están dadas por transformaciones de Moebius (la estructura dada por el teorema de uniformización es una de éstas). Podemos considerar estructuras proyectivas definidas a lo largo de las hojas de foliaciones holomorfas por curvas en variedades compactas que, además, varían de manera holomorfa en la dirección transversa. Veremos que muchas foliaciones admiten este tipo de estructuras, y hablaré de un teorema de índice que implica que algunas foliaciones no las admiten. Estos resultados son parte de un trabajo en colaboración con Bertrand Deroin.

Foliated projective structures

Every complex curve has a projective structure: a set of charts whose changes of coordinates are given by Moebius transformations (for instance, the Uniformization Theorem gives such a structure). For a holomorphic foliation by curves on a compact complex manifold, we may consider projective structures along its leaves which vary holomorphically in the transverse direction. We will see that many foliations admit such structures, and we will talk about an index theorem that implies that some foliations do not. The talk is based on joint work with Bertrand Deroin.

- **Christian Bonatti**, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon, France

El círculo al infinito de familias de foliaciones del plano.

Grupos que actúan en el plano preservando una foliación o dos foliaciones transversales, inducen una acción en "el círculo al infinito". Después de precursores como Thurston o Calegari, este círculo al infinito es un objeto más folclórico que bien entendido en particular cuando está asociado a más que una foliación. En un trabajo reciente, estoy proponiendo mi propia versión de este círculo al infinito. En camino yo exploré hasta donde se puede extender esta noción, por ejemplo para foliaciones no transversales, y/o foliaciones singulares del plano.

Ilustraré esa generalidad construyendo el círculo al infinito canónicamente asociado a cualquier familia numerable $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de campos polinomiales del plano \mathbb{R}^2 cuyas singularidades son todas sillas hiperbólicas. Es la única compactificación tal que:

- toda órbita que no va a una de las sillas tiene su límite en 1 punto del círculo al infinito
- el conjunto de órbitas que van al mismo punto del círculo es finito o numerable
- en cualquier intervalo abierto I del círculo al infinito, hay 2 órbitas del mismo campo X_i que llegan a I .

- **Dmitry Novikov**, Weizmann Institute, Israel

Sharply o-minimal structures and Wilkie Conjecture

(Joint with Gal Binyamini and Benny Zack) The theory of o-minimal structures provides a powerful framework for the study of geometrically tame structures. In the past couple of decades a deep link connecting o-minimality to algebraic and arithmetic geometry has been developing. However, the axioms of o-minimality do not fully capture some algebro-arithmetic aspects of tameness that one may expect in structures arising from geometry. We propose a notion of sharply o-minimal structures refining the standard axioms of o-minimality and prove Wilkie Conjecture using properties of these structures.

- **Gabriela Jocelyn Gutiérrez Guillen**, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon, France

Monodromía hamiltoniana: un vínculo entre la geometría y la física

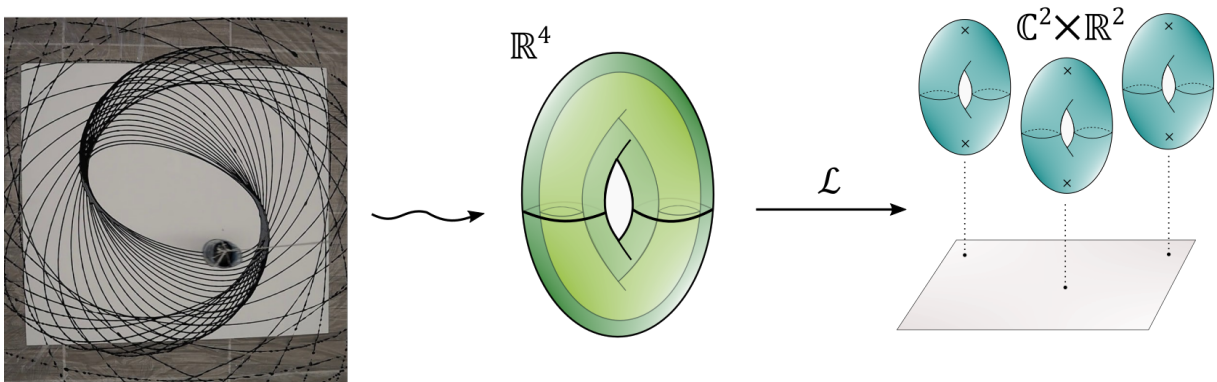
Cuando estudiamos un fenómeno físico que puede ser descrito por la mecánica clásica, debemos de vez en cuando trabajar con ecuaciones diferenciales hamiltonianas. En el estudio de los sistemas hamiltonianos existe un tipo especial de sistemas llamado sistemas completamente integrables; éstos, tienen una estructura topológica buena en el espacio de fases. Esta estructura da un cambio local de coordenadas, llamado coordenadas de ángulo de acción, que transforma el flujo del sistema en un flujo lineal sobre toros invariantes. La monodromía hamiltoniana es la obstrucción topológica más simple a la existencia de coordenadas de ángulo de acción global.

En esta charla, introduciré, en \mathbb{R}^4 , todos los conceptos que se mencionaron en el párrafo anterior de forma geométrica. Luego, explicaré cómo, utilizando pares espectrales laxos, se puede introducir una superficie de Riemann tal que el cálculo de la monodromía hamiltoniana se reduzca al cálculo de un residuo en el infinito de una forma meromorfa definida sobre esta superficie de Riemann.

Hamiltonian Monodromy: a link between geometry and physics

When we study a physical phenomenon that can be described by classical mechanics, most of the time we work with Hamiltonian differential equations. In the study of Hamiltonian systems there is a special kind called completely integrable systems which have a nice topological structure on the phase space. This structure gives a local change of coordinates, called action-angle coordinates, which transforms the flow of the system to a linear flow over invariant tori. Hamiltonian monodromy is the simplest topological obstruction to the existence of global action-angle coordinates.

In this talk, I will introduce, in \mathbb{R}^4 , all of the concepts that were mentioned in the previous paragraph in a geometric way. Then, I will explain how, using spectral lax pairs, one can introduce a Riemann surface such that the computation of Hamiltonian monodromy boils down to the computation of a residue at infinity of a meromorphic form defined over this Riemann surface.



- **Gibrán Rodrigo Espejo Ramos**, Instituto de Matemáticas, UNAM

Ejemplos de vecindades de curvas elípticas

Una curva elíptica es, por definición, una variedad compleja unidimensional homeomorfa al toro. Podemos pensar que la curva elíptica C se describe como el cociente de \mathbb{C} por una retícula $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $Im\tau > 0$. La vecindad bidimensional más simple que contiene una curva elíptica es el producto directo $C \times \mathbb{C}$.

En la primera parte de la charla, presentaré cómo podemos construir más ejemplos como cocientes de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, siguiendo a Arnold *Métodos geométricos en la teoría de lo ordinario ecuaciones diferenciales*.

En la segunda parte de la charla, estudiaremos el ejemplo de Serre S_0 de una vecindad de una curva elíptica C y una familia de foliaciones en S_0 que tienen C como curva invariante. Veremos cómo el ejemplo de Serre después de transformaciones racionales (blow-ups y blow-downs) se convierte en una cobertura ramificada dos a uno sobre la superficie de Hirzebruch \mathbb{F}_2 (la compactación de fibras del haz tangente de la esfera de Riemann), y cómo la familia correspondiente de foliaciones en \mathbb{F}_2 puede ser descrita por una ecuación de Riccati.

Por último, mencionaré cómo podemos construir ejemplos de vecindades de curvas elípticas ampliando ocho puntos en \mathbb{F}_2 y cómo la clasificación analítica de tales vecindades depende de la posición de los puntos.

Examples of neighborhoods of elliptic curves

An elliptic curve is, by definition, a one-dimensional complex manifold homeomorphic to the torus. We can think that the elliptic curve C is described as the quotient of \mathbb{C} by a lattice $\Gamma_\tau = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, $Im\tau > 0$. The simplest two-dimensional neighborhood containing an elliptic curve is the direct product $C \times \mathbb{C}$. In the first part of the talk I will present how we can construct more examples as quotients of $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ following the exposition found in Arnold's book *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*.

In the second part of the talk, we will study Serre's example S_0 of a neighborhood of an elliptic curve C and a family of foliations in S_0 having C as an invariant curve. We will see how Serre's example after rational transformations (blow-ups and blow-downs) becomes a two to one ramified cover over the Hirzebruch surface \mathbb{F}_2 (The fiber compactification of the tangent bundle of the Riemann sphere) and how the corresponding family of foliations in \mathbb{F}_2 can be described by a Riccati equation.

Lastly, I will mention how we can construct examples of neighborhoods of elliptic curves by blowing-up eight points in \mathbb{F}_2 and how the analytical classification of such neighborhoods depends on the position of the points.

- **Gilberto Bruno Pérez**, Instituto de Matemáticas, UNAM

Hojas Algebraicas distinguidas

Las curvas solución de la ecuación diferencial que define un campo de vectores polinomial en \mathbb{C}^2 , v , constituyen lo que se conoce como una foliación holomorfa por curvas, \mathcal{F}_v , cuyas hojas son precisamente las soluciones de la ecuación diferencial. Dichas curvas pueden extenderse a una vecindad de la línea al infinito, extendiendo también a \mathcal{F}_v , a una foliación del plano proyectivo complejo, $\mathbb{C}P^2$. Las foliaciones de $\mathbb{C}P^2$ que se obtienen de esta manera suelen tener, en su mayoría, a la recta al infinito como una de sus hojas; sin embargo en los 50's I. G. Petrovskiĭ y E. M. Landis demostraron que genéricamente dicha recta es la única hoja algebraica; es decir definida por los ceros de un polinomio en dos variables. Más tarde, en 1978, bajo algunas condiciones de genericidad, incluida la ausencia de hojas algebraicas distintas de la línea al infinito, Yu. Ilyashenko demostró que dos foliaciones, cercanas en la topología uniforme, que son topológicamente equivalentes son necesariamente afin equivalentes.

En esta plática hablaremos de foliaciones en el conjunto excepcional, aquellas que sí poseen una hoja algebraica distinta de la línea al infinito y son por tanto no genéricas. El propósito es analizar en qué grado, la presencia de dicha hoja especial, determina a la foliación y la influencia que tiene la curva y sus invariantes analíticos en la clasificación analítica de foliaciones que la contienen como hoja algebraica. Para una curva algebraica particular, con invariantes analíticos no triviales, describiremos completamente el espacio de campos vectoriales polinomiales que generan a foliaciones que la tienen como hoja algebraica y, con ayuda de dicha caracterización, describiremos la clase analítica de estas foliaciones para un grado fijo del campo vectorial.

Distinguished algebraic leaves

The solution curves of the differential equation that defines a polynomial vector field in \mathbb{C}^2 , v , constitute what is known as a holomorphic foliation by curves, \mathcal{F}_v , whose leaves are precisely the solutions of the differential equation. Such curves can be extended to a neighborhood of the line at infinity, also extending \mathcal{F}_v , to a foliation of the complex projective plane, $\mathbb{C}P^2$. The foliations of $\mathbb{C}P^2$ that are obtained in this way usually have the line at infinity as one of their leaves; however, in the 50's I. G. Petrovskiĭ and E. M. Landis proved that generically the line at infinity is the only algebraic leaf; this means that this line is the only leaf defined by the zeros of a polynomial in two variables. Later, in 1978, under some generic conditions, including the absence of algebraic leaves other than the line at infinity, Yu. Ilyashenko proved that two foliations, close in the uniform topology, that are topologically equivalent are necessarily affine equivalent.

In this talk we will talk about foliations in the exceptional set, those that do have an algebraic leaf other than the line at infinity and are therefore not generic. The purpose is to analyze to what extent, the presence of such a special leaf, determines the foliation, as well as the influence that the curve and its analytical invariants have on the analytical classification of foliations that contain it as an algebraic leaf. For a particular algebraic curve, with non-trivial analytic invariants, we will completely describe the space of polynomial vector fields that generate foliations that have it as an algebraic leaf and, with the help of such characterization, we will describe the analytic class of these foliations for a fixed degree of the vector field.

- **Guadalupe Martínez Salgado**, Instituto de Matemáticas, UNAM

El problema de Thom para campos vectoriales real-analíticos en $(\mathbb{R}^2, 0)$.

Consideremos la clase \mathcal{A}_n^0 de campos vectoriales analíticos con coeficientes reales, definidos en una vecindad del origen de \mathbb{R}^2 , que son de la forma

$$v(x, y) = \sum_{j=n}^{\infty} (P_j(x, y), Q_j(x, y)),$$

con $n \geq 2$, y P_j, Q_j , polinomios homogéneos de grado j con coeficientes reales, que además satisfacen la propiedad $P(0, y) \equiv 0$.

Diremos que dos campos vectoriales v y w en la clase \mathcal{A}_n^0 son equivalentes si existe una transformación analítica, con coeficientes reales, que lleve a las soluciones de la ecuación diferencial inducida por v en aquellas de la ecuación diferencial determinada por w .

El problema de Thom para la clase \mathcal{A}_n^0 , consiste en dar un conjunto de invariantes τ_v para cada campo v en esta clase, a los cuales llamaremos *los invariantes de Thom de v* , de modo que la equivalencia de dos campos vectoriales v y w esté dada por la coincidencia de sus respectivos invariantes. El problema de Thom para la clase de campos vectoriales genéricos con coeficientes complejos, cuya parte principal es homogénea de grado n , fue resuelto ya por Laura Ortiz, Ernesto Rosales y Serguei Voronin.

Para resolver el problema de Thom en el caso analítico real, la primera cosa que hacemos es complejificar los campos vectoriales con los que estamos trabajando.

Podemos complejificar a un campo vectorial v en la clase \mathcal{A}_n^0 , permitiendo que los puntos (x, y) en los que se evalúa pertenezcan ahora a una vecindad del origen de \mathbb{C}^2 , pero conservando sus coeficientes reales. Denotaremos por \mathbf{v} a este nuevo campo vectorial.

Cada campo $v \in \mathcal{A}_n^0$ es formalmente equivalente a un campo vectorial $v_{c,b} = v_o + v_c + v_b$, al cual llamamos su *forma normal formal*, donde $v_o = (P_n, Q_n)$ es la parte principal de v , v_c es un campo vectorial hamiltoniano con coeficientes reales, y v_b es un campo vectorial radial formal, también con coeficientes reales. La manera de obtener esta forma normal formal es considerar la complejificación de v , y luego utilizar las técnicas que se usaron para resolver el problema de Thom en el caso complejo, obteniendo así la forma normal formal de \mathbf{v} . En este proceso es necesario asegurar que todas las transformaciones que se hacen para modificar al campo \mathbf{v} sean analíticas con coeficientes reales, de modo que al final, la forma normal formal tenga coeficientes reales, y al restringirla a \mathbb{R}^2 obtengamos la forma normal formal del campo con el que iniciamos. La parte hamiltoniana v_c del campo vectorial $v_{c,b}$, constituye uno de los invariantes de Thom de v .

Por otro lado, la complejificación de v tiene naturalmente asociado un grupo de monodromía proyectiva G_v , que surge cuando consideramos la explosión en el origen de \mathbf{v} . La clase de conjugación de este grupo es el otro invariante de Thom de v . El hecho de que \mathbf{v} conserve los coeficientes reales del campo vectorial inicial v , provoca que las hojas de la foliación inducida por \mathbf{v} sean muy simétricas, y esto se hereda las transformaciones de monodromía que generan al grupo G_v . En particular, un subconjunto de los generadores de G_v están relacionados mediante la conjugación compleja, por lo que la cantidad total de generadores se ve reducida debido a estas relaciones que se presentan. En este sentido, los invariantes de Thom de v se ven reducidos, en comparación con los que tendría un campo vectorial con coeficientes complejos.

Una vez que ya obtuvimos los invariantes de Thom para cada campo en la clase \mathcal{A}_n^0 , podemos determinar cuándo dos de estos campos vectoriales son equivalentes, resolviendo así el problema de Thom para la clase de campos vectoriales analítico reales. Esta caracterización queda establecida en el siguiente teorema.

Corolary 0.1. *Dos campos vectoriales genéricos v y w en \mathcal{A}_n^0 son analíticamente equivalentes, $v \sim w$, sí y sólo si tienen los mismos invariantes de Thom, es decir, $\tau_v = (v_c, [G_v]) = (w_c, [G_w]) = \tau_w$.*

Thom's problem for real analytic vector fields in $(\mathbb{R}^2, 0)$.

Lets consider the class \mathcal{A}_n^0 of analytic vector fields with real coefficients, defined in a neighborhood of the origin of \mathbb{R}^2 , which are of the form

$$v(x, y) = \sum_{j=n}^{\infty} (P_j(x, y), Q_j(x, y)),$$

with $n \geq 2$, and P_j, Q_j , homogeneous polynomials of degree j with real coefficients, which also satisfy the property $P(0, y) \equiv 0$.

We will say that two vector fields v and w in the class \mathcal{A}_n^0 are real analytically equivalent if there exists an analytic transformation, with real coefficients, which takes the solutions of the differential equation induced by v into those of the differential equation determined by w .

Thom's problem for the class \mathcal{A}_n^0 , consists in giving a set of invariants τ_v for each field v in this class, which we will call *the Thom invariants of v* , so that the equivalence of two vector fields v and w is given by the coincidence of their respective invariants. Thom's problem for the class of generic vector fields with complex coefficients, whose principal part is homogeneous of degree n , was already solved by Laura Ortiz, Ernesto Rosales and Serguei Voronin.

To solve Thom's problem in the real analytical case, the first thing we do is to complexify the vector fields we are working with.

We can complexify a vector field v in the class \mathcal{A}_n^0 , allowing the points (x, y) at which it is evaluated to belong to a neighborhood of the origin of \mathbb{C}^2 , but preserving its real coefficients. We denote this new vector field by \mathbf{v} .

Each vector field $v \in \mathcal{A}_n^0$ is formally equivalent to a vector field $v_{c,b} = v_o + v_c + v_b$, which we call its *formal normal form*, where $v_o = (P_n, Q_n)$ is the principal part of v , v_c is a hamiltonian vector field with real coefficients, and v_b is a formal radial vector field, also with real coefficients. The way to get this formal normal form is to consider the complexification of v , and then use the techniques that were used to solve Thom's problem in the complex case, in order to obtain the formal normal form of \mathbf{v} . In this process it is necessary to ensure that all the transformations that are done to modify the field \mathbf{v} are analytic with real coefficients, so that in the end, the formal normal form has real coefficients, and by restricting it to \mathbb{R}^2 we obtain the formal normal form of the vector field we started with. The hamiltonian part v_c of the vector field $v_{c,b}$, constitutes one of the Thom invariants of v .

On the other hand, the complexification of v is naturally associated with a projective monodromy group G_v , which arises when we consider the blow-up at the origin of \mathbf{v} . The conjugacy class of this group is the other Thom invariant of v . The fact that \mathbf{v} preserves the real coefficients of the initial vector field v , makes the leaves of the foliation induced by \mathbf{v} to be highly symmetric, and this property is inherited by the monodromy transformations that generate the group G_v . In particular, a subset of the generators of G_v are related by complex conjugation, so that the total number of generators is reduced due to these relationships. In this sense, the Thom invariants of v are reduced, compared to those of a vector field with complex coefficients.

Once we have obtained the Thom invariants for each vector field in the class \mathcal{A}_n^0 , we can determine when two of these vector fields are equivalent in terms of their invariants, thus resolving Thom's problem for the class of real analytic vector fields. The characterization to which we refer is established in the following theorem.

Corolary 0.2. *Two generic vector fields v and w in the class \mathcal{A}_n^0 are real analytically equivalent, $v \sim w$, if and only if they have the same Thom invariants, that is, $\tau_v = (v_c, [G_v]) = (w_c, [G_w]) = \tau_w$.*

- **Jessica Angélica Jaurez Rosas**, Facultad de Ciencias, UNAM

Realización de invariantes de campos vectoriales como curvas de tangencia

Dado un campo vectorial, consideramos la ecuación diferencial que éste induce. Las soluciones a esta ecuación dan lugar a una partición del espacio. Un problema consiste en conocer esta diversidad de particiones, salvo cambios de coordenadas. A las "etiquetas" que permitan identificar a todos y cada uno de los diferentes tipos de particiones, les llamaremos "invariantes mínimos de clasificación".

Para campos holomorfos definidos alrededor de un punto singular en \mathbb{C}^2 , diversos matemáticos, entre ellos R. Thom, conjeturaron cuáles serían los invariantes mínimos de clasificación. Entre los resultados obtenidos en torno a este problema, se encuentran diversos trabajos de L. Ortiz, E. Rosales y S. Voronin, en los que obtuvieron los invariantes mínimos de clasificación para dos clases distintas de campos vectoriales. Estos invariantes son parejas que consisten en un "invariante paramétrico" y un "invariante funcional", teniendo este último una interpretación geométrica.

En esta plática abordaremos el problema de dar una interpretación geométrica al "invariante paramétrico". Para ello, consideraremos parejas de campos vectoriales y fijaremos nuestra atención en aquellos puntos donde sus soluciones son tangentes; estos puntos forman una curva a la que llamaremos "curva de tangencia".

Por medio de las curvas de tangencia de parejas de campos, relacionaremos los invariantes paramétricos con curvas analíticas. Observaremos que, bajo ciertas condiciones, la realización de curvas de tangencia permite establecer una relación uno a uno entre los invariantes paramétricos y ciertas curvas analíticas, estas últimas salvo cambios de coordenadas.

Este trabajo fue realizado en colaboración con Laura Ortiz Bobadilla

Realization of Invariants of Vector Fields by Tangency Curves

Given a vector field, we consider the differential equation induced by it. The solutions to this equation give rise to a partition of the space. One problem is to know the diversity of partitions, except for changes of coordinates. The "labels" that allow us to identify each and every one of the different types of partitions will be called "minimal classification invariants".

For holomorphic vector fields defined around a singular point in the complex plane, \mathbb{C}^2 , several mathematicians, among them R. Thom, conjectured what the minimal classification invariants would be. Among the results obtained on this problem are several works by L. Ortiz, E. Rosales and S. Voronin, in which they obtained the minimal classification invariants for two different classes of vector fields. These invariants are pairs consisting of a "parametric invariant" and a "functional invariant", the latter invariant having a geometric relation with the vector fields.

In this talk we will approach the problem of giving a geometric interpretation to the "parametric invariant". For that, we will consider pairs of vector fields and we will focus our attention on those points where their solutions are tangent; these points form a curve which we will call "tangency curve".

By means of tangency curves of pairs of fields, we will relate parametric invariants to analytic curves. We will note that, under certain conditions, the realization of tangency curves establish a one-to-one correspondence between parametric invariants and certain analytic curves, the latter except for changes of coordinates.

Work in collaboration with Laura Ortiz-Bobadilla

- **Jessie Diana Pontigo Herrera**, Instituto de Matemáticas, UNAM

La profundidad de la órbita

Consideraremos deformaciones de foliaciones hamiltonianas de la forma $dF + \epsilon\eta = 0$, donde $F \in \mathbb{C}[x, y]$, η es una 1-forma polinomial y ϵ es un parámetro suficientemente pequeño. Asumiremos que la foliación hamiltoniana definida por $dF = 0$ tiene una familia continua de órbitas periódicas $\gamma_t \subset F^{-1}(t)$, con t valores regulares. En este contexto existen dos preguntas clásicas conocidas como la versión infinitesimal del problema 16 de Hilbert y la versión infinitesimal del problema de centro-foco de Poincaré, las cuales piden dar una cota de los ciclos límite que surgen en la deformación y caracterizar las deformaciones que preservan a la familia continua de órbitas periódicas, respectivamente. Información esencial acerca de lo que ocurre con estas órbitas al deformar se encuentra en el desarrollo en serie de potencias de la función de desplazamiento $\Delta(t, \epsilon) = \epsilon M_1(t) + \epsilon^2 M_2(t) + \dots$, cuyos ceros en t corresponden con las órbitas periódicas que persisten en la deformación. En este desarrollo, entender la naturaleza de las funciones M_i , conocidas como funciones de Melnikov, es clave.

Con la finalidad de describir un aspecto analítico de estas funciones (a saber, acotar la longitud de sus integrales iteradas), definimos un objeto llamado *la profundidad de la órbita*. Este objeto se define a través de los conmutadores de la serie central inferior de $\pi_1 := \pi_1(F^{-1}(t), p_0)$, y la órbita por monodromía \mathcal{O}_{γ_t} de γ_t , y esencialmente nos informa qué tan profundo puede ir la órbita en la serie central inferior de π_1 sin caer en $[\mathcal{O}_{\gamma_t}, \pi_1]$. Independientemente de la utilidad que tiene este objeto en el estudio de las funciones de Melnikov, creemos que puede ser de utilidad para describir algunos otros aspectos topológicos o analíticos de la foliación hamiltoniana o de sus deformaciones. En esta plática definiremos este objeto y veremos algunos ejemplos para ilustrar su comportamiento en las foliaciones, particularmente nos enfocaremos en lo que ocurre en deformaciones de un hamiltoniano definido por el producto de cuatro rectas.

Este plática está basada en trabajos en colaboración con Pavao Madesic, Dmitry Novikov y Laura Ortiz Bobadilla.

The orbit depth

We consider deformations of hamiltonian foliations of the form $dF + \epsilon\eta = 0$, where $F \in \mathbb{C}[x, y]$, η is a polynomial 1-form and ϵ is a small enough parameter. We will assume that the hamiltonian foliation defined by $dF = 0$ have a continuous family of periodic orbits $\gamma_t \subset F^{-1}(t)$, with t regular values. In this context, there are two classical questions known as the infinitesimal version of Hilbert 16th problem and the infinitesimal version of the Poincaré center-focus problem, which ask for a bound for the number of limit cycles born in the deformation and for a characterization of the deformations preserving the periodic orbits in the family, respectively.

Essential information about what happens with the orbit when we perform a deformation is given by the displacement function $\Delta(t, \epsilon) = \epsilon M_1(t) + \epsilon^2 M_2(t) + \dots$, whose zeros in the variable t correspond with the periodic orbits persisting after the deformation. Understanding the nature of the so-called Melnikov M_i is a key point.

With the aim of describing one analytic aspect of these functions (namely, a bound for the length of their iterated integrals), we define an object called *the orbit depth*. This object is defined through the inferior central series of $\pi_1 := \pi_1(F^{-1}(t), p_0)$, and the orbit under monodromy \mathcal{O}_{γ_t} of γ_t , and essentially give us information about how deep the orbit can go through the inferior central series without lying in $[\mathcal{O}_{\gamma_t}, \pi_1]$. Independently of the usefulness of this object in the study of Melnikov functions, we believe that this can be also useful for understanding some other topological or analytical aspects of hamiltonian foliations or of their deformations. In this talk we will define the orbit depth and we will analyse some examples to illustrate its behaviour with respect to the foliations. Particularly, we will focus on what happens with deformations of a hamiltonian defined by a product of four lines.

This talk is based on joint work with Pavao Madesic, Dmitry Novikov and Laura Ortiz-Bobadilla.

- **Jesús Alberto Palma Márquez**, Weizmann Institute, Israel

Poliedros de Newton, explosiones ramificadas, y series de potencias generalizadas.

Inspirados en ideas y métodos (principalmente nociones básicas de álgebra lineal) introducidos por A. G. Khovanskii en su presentación de la resolución de singularidades tórica en geometría algebraica y analítica, mostraremos una prueba constructiva y elemental de la así llamada reducción estratificada de singularidades de funciones analíticas generalizadas (i.e., funciones continuas de variable real definidas localmente como la suma de alguna serie de potencias convergente con exponentes contenidos en un producto de subconjuntos bien ordenados de los números reales no negativos). Este resultado da una respuesta parcial al problema de monomialización global para esta clase de funciones. Además, el proceso de monomialización que describiremos sólo depende del poliedro de Newton en cuestión.

Newton polyhedra, branched blow-up, and generalized power series.

Inspired by ideas and methods (mainly notions principles of linear algebra) introduced by A. G. Khovanskii in his presentation of the resolution of toric singularities in algebraic and analytic geometry, we will show a constructive and elementary proof of the so-called stratified reduction of singularities of generalized analytic functions (i.e., continuous functions of real variable defined locally as the sum of some series of convergent powers with exponents contained in a product of well-ordered subsets of the nonnegative real numbers). This result gives a partial answer to the global monomialization problem for this class of functions. Furthermore, the process of monomialization that we will describe only depends on the Newton polyhedron involved.

- **Laura Ortiz Bobadilla**, Instituto de Matemáticas, UNAM

Modelos locales simples en la comprensión de foliaciones analíticas por curvas

Las soluciones de una ecuación diferencial analítica definen una partición del espacio por curvas que no se cortan entre sí. Se dice que dicha partición define una foliación por curvas (las hojas de la foliación). Cuando la ecuación diferencial tiene puntos singulares, se tiene una foliación por curvas con singularidades. El análisis de las ecuaciones diferenciales en vecindades de sus puntos singulares arroja información local sustancial sobre el comportamiento de la foliación (local o global) que define; es por ello que la clasificación de éstas ha sido tarea recurrente desde tiempos de Poincaré.

En la charla abordaremos el problema de la clasificación analítica de foliaciones en vecindades del origen en el plano complejo. Para ello habremos de considerar parejas de ecuaciones diferenciales; es decir, en el abierto a considerar, se tendrán dos foliaciones de diferentes tipos con las que nos ayudaremos a dar sistemas coordenados en ciertas regiones. En los lugares en los que las foliaciones sean tangentes, dicho sistema coordenado no puede ser definido de la misma forma, sin embargo, como si fuera un tesoro escondido, los lugares de tangencias aportarán información fundamental para dicha clasificación.

La primera pregunta entonces es cuándo (y cómo), dada una foliación, es posible asociar a ésta una pareja de modo tal que sus lugares de tangencia aporten información analítica suficiente sobre invariantes de clasificación analítica de ambas foliaciones.

En la charla nos limitaremos a dar respuesta a esta pregunta haciendo uso de representantes (modelos) analíticos locales sencillos. En la charla de Jessica Jaurez se establecerá la relación entre dichos invariantes analíticos de clasificación.

La plática está basada en un trabajo en colaboración con Jessica Jaurez Rosas y Sergei Voronin.

Simple local models in the understanding of analytic foliations by curves

The solutions of an analytic differential equation define a partition of the space by pairwise non intersecting curves. Such a partition is said to define a foliation by curves (the leaves of the foliation). When the differential equation has singular points, we have a foliation by curves with singularities. The analysis of the differential equations in neighborhoods of their singular points gives substantial local information about the behavior of the foliation (local or global) that it defines; for such reason, the classification of these has been a recurring task since the time of Poincaré.

In the talk we will address the problem of the geometrical understanding of the analytical classification of foliations in neighborhoods of the origin in the complex plane. For this sake, we will have to consider pairs of differential equations; that is, in the domains to consider, there will be two foliations of different types with which we will help to give coordinate systems in certain regions. In the places where such foliations are tangent, such a coordinate system cannot be defined in the same way, however, as if it were a hidden treasure, the places of tangencies (tangency curves) will provide fundamental information for the required classification.

The first question then is to know when (and how), given a foliation, it is possible to associate a pair to it in such a way that their curves of tangency provide enough analytical information about the invariants of analytical classification of both foliations.

In the talk we will focus on this question using simple local analytical representatives (models) and normalizing transformations. In Jessica Jaurez's talk the relationship between these analytical classification invariants will be given.

The talk is based on a work in collaboration with Jessica Jaurez Rosas and Sergei Voronin.

- **Mónica de Nova Vázquez**, Instituto de Matemáticas, UNAM

Dinámica de intersección en subespacios lineales del espacio complejo m -dimensional

Consideramos dos subespacios lineales X y Y del espacio complejo m -dimensional \mathbb{C}^m , $m > 1$, cuyas dimensiones son complementarias, esto es $\dim_{\mathbb{C}}(X) = k$ y $\dim_{\mathbb{C}}(Y) = m - k$. También consideramos un isomorfismo lineal F de \mathbb{C}^m en sí mismo. Estudiamos las propiedades de la intersección del subespacio Y con la n -ésima iteración del subespacio X bajo el isomorfismo F y $k = 1$. Describimos el conjunto de momentos n de no transversalidad entre los subespacios Y y $F^n(X)$ en dimensiones bajas, $m = 2, 3$.

Además, en el caso cuando el subespacio X es de dimensión uno o dos, obtenemos algunos resultados sobre una clasificación geométrica cuando tenemos un conjunto infinito de momentos n de no transversalidad entre el subespacio Y y $F^n(X)$.

Intersection dynamics on linear subspaces of the m -dimensional complex space

Let X, Y be two linear subspaces of the m -dimensional complex space \mathbb{C}^m , $m > 1$, with complementary dimensions k and $m - k$ respectively, and let F be a linear isomorphism \mathbb{C}^m to itself. We study the properties of the intersection of the subspace Y with the n -iteration of the subspace X by the isomorphism F when $k = 1$ and F is diagonalizable. We describe the set of moments n of no transversality between the spaces Y and the n -iteration by F of X in low dimensions, $m = 2, 3$.

In the case when the dimension of the subspace X is either one or two, we give some results about a geometrical classification when we obtain an infinite set of moments n of no transversality between the space Y and the n -iteration of X under F .

- **Oziel Gómez Martínez**, Facultad de Ciencias UNAM

Invariantes analíticos de separatrices de foliaciones dicríticas.

El estudio de la clasificación analítica de las ramas planas fue introducido por O. Zariski en la década de 1960. En su trabajo, Zariski introduce la primera invariante analítica de clasificación de ramas planas conocida como invariante de Zariski.

En esta charla estudiamos el invariante de Zariski de las separatrices de una familia de foliaciones dicríticas de $(\mathbb{C}^2, 0)$. En particular, recuperamos el invariante de Zariski en términos de la ecuación que define la foliación y damos condiciones para asegurar que el invariante de Zariski sea el mismo para todas las separatrices. En la obtención del resultado mencionado, juega un papel importante el lugar geométrico de las tangencias entre dos foliaciones, conocido como curva jacobiana o curva polar.

Analytical invariants of separatrices of dicritical foliations.

The study of the analytical classification of plane branches was introduced by O. Zariski in the 1960's. In his work Zariski introduces the first analytic invariante of classification of plane branches known as the Zariski invariant.

In this talk we study the Zariski invariant of the separatrices of a family of dicritical foliations of $(\mathbb{C}^2, 0)$. In particular, we recover the Zariski's invariant in terms of the equation defining the foliation and we give conditions to ensure that the Zariski invariant is the same for all separatrices. For the previous result, the locus of tangencies between two foliations, known as the Jacobian curve or polar curve, plays an important role.

- **Pavao Mardesic**, Institut de Mathématiques de Bourgogne, Dijon, France

Deformaciones de foliaciones de Darboux genéricas e integrales pseudo-abelianas.

Presentamos un trabajo realizado con Colin Christopher. En éste estudiamos deformaciones $\omega + \epsilon\eta$ de sistemas de Darboux genéricas y la parte principal M_1 de la función de desplazamiento, dada por una integral pseudo-abeliana.

Introducimos la noción de forma Darboux relativamente exacta y mostramos que M_1 es idénticamente nula si y solo si η es Darboux relativamente exacta. Obtenemos tres corolarios:

- 1) El estrato de centros con una integral primera de Darboux es una componente algebraica irreducible de la variedad de centros.
- 2) Un algoritmo para calcular la primera función de Melnikov M_k no nula,
- 3) Una cota inferior para el número de ciclos que se pueden crear desde un centro genérico.

Esos resultados generalizan resultados clásicos de Ilyashenko y Françoise sobre deformaciones de sistemas Hamiltonianos.

- **Quentin Gendron**, Instituto de Matemáticas, UNAM

Un poco de geometría y topología asociada al ecuación de Pell-Abel

En 1826 Abel considera la versión polinomial de la ecuación de Pell: $P^2 - DQ^2 = 1$. En esa ecuación, el polinomio D es dado y P, Q son las incógnitas. Abel pudo determinar los polinomios D para los cuales existe una solución (no trivial). A pesar de su importancia en varias ramas de las matemáticas, como los polinomios de Chebyshev, los puntos de órdenes finitos en superficies hiperelípticas, los enteros algebraicos..., quedan preguntas básicas abiertas.

En esa charla, quiero explicarles por qué esas soluciones forman variedades, en general no conexas. Para hacerlo les mostraré que las soluciones se pueden entender gracias a unas diferenciales especiales sobre superficies de Riemann hiperelípticas.

Estas investigaciones se llevan a cabo junto con Andrey Bogatyrev.

A bit of geometry and topology associated with the Pell-Abel equation

In 1826 Abel considers the polynomial version of Pell's equation: $P^2 - DQ^2 = 1$. In that equation, the polynomial D is given and P, Q are the unknowns. Abel was able to determine the polynomials D for which there is a (non-trivial) solution.

Despite its importance in various branches of mathematics, such as Chebyshev polynomials, points of finite orders on hyperelliptic surfaces, algebraic integers..., basic questions remain open.

In the talk, I want to explain to you why these solutions form varieties, which are generally not connected. To do so, I will show you that the solutions can be understood thanks to special differentials on hyperelliptic Riemann surfaces.

Those investigations are carried out together with Andrey Bogatyrev.

- **Xavier Gómez-Mont Ávalos** , Centro de Investigación en Matemáticas, Cimat

On a Topological Bilinear Form for Plane Curve Singularities

Let $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ be a germ of a holomorphic function with an isolated singularity at 0, Let $C_t := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} / f(z_1, z_2) = t\}$ be the Milnor fibre of f , $t \neq 0$, and $H_1(C_t, \mathbb{Q})$ its 1-homology group. The Geometric Monodromy Map $h : C_t \rightarrow C_t$ describes the physiology of the singularity obtained from the fibre bundle structure obtained by going around the singularity once around a circle of values, and the Algebraic Monodromy Map $h_* : H_1(C_t, \mathbb{Q}) \rightarrow H_1(C_t, \mathbb{Q})$ measures its effect on 1-homology, and it is an automorphism preserving the bilinear form obtained by the intersection $(,)$ of cycles.

One may decompose the Milnor fibre into a finite number of sub-surfaces S_k which are permuted by h , and some rings with core δ_j , which are bridges between the different subsurfaces S_k . For a convenient integer m , h^m will be the identity on the sub-surfaces and a Dehn twist on the rings. To each of the rings we may associate a weight κ_j , a rational number that measures the amount of twisting divided by the number of iterates m . From this data we may construct a symmetric bilinear form

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : H_1(C_t, \mathbb{Q}) \times H_1(C_t, \mathbb{Q}) &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ \langle \alpha, \beta \rangle &= \sum_j \kappa_j(\alpha, \gamma_j)(\beta, \gamma_j) \end{aligned}$$

which is an invariant of the singularity. It is the sum with weights of the product of the common times that the cycles α and β pass through the rings δ_j . This bilinear form is degenerate on the \mathbb{Q} -vector space $\oplus_k H_k(S_k, \mathbb{Q})$, giving rise to a non-degenerate bilinear form

$$\langle , \rangle : \frac{H_1(C_t, \mathbb{Q})}{\oplus_k H_1(S_k, \mathbb{Q})} \times \frac{H_1(C_t, \mathbb{Q})}{\oplus_k H_1(S_k, \mathbb{Q})} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

We will present the following result, obtained together with Alanís, Artal, Bonatti, González Villa and Portilla:

Theorem: If N denotes the unipotent part of the Algebraic Monodromy, then the bilinear form \langle , \rangle is $(N,)$ and it is positive definite.

I will also mention some advances in understanding of the organization of the singular points obtained from a Morsification, related to the decomposition into irreducible factors of the polar curve $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ and the decomposition of the Milnor fibre into subsurfaces after removing from the Milnor fibre the real curve defined by

$$f = t, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} / \frac{\partial f}{\partial z_1} \in \bar{\mathbb{R}}.$$