Capítulo 1

Álgebras de Lie

1.1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.1 *Un* álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *sobre un campo* $\mathbb{k}$, *es un* $\mathbb{k}-$*espacio vectorial* $\mathfrak{g}$ *junto con una función bilineal* $[-,-]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ *tal que:*

(a) $[x,y]=-[y,x]$ *(Antisimetría)*

(b) $[[x,y],z]+[[y,z]x]+[[z,x],y]=0$ *(Identidad de Jacobi).*

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $x\in\mathfrak{g}$ se define la *representación adjunta*

$$\mathbf{ad}\ (x):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

dada por $(\mathbf{ad}\ (x))(y)=[x,y]$.
Sean $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ álgebras de Lie sobre un campo $\mathbb{k}$. Un *homomorfismo* de álgebras de Lie es una transformación lineal $\theta:\mathfrak{g}_1\to\mathfrak{g}_2$ tal que $\theta([x,y])=[\theta(x),\theta(y)]$ para todo $x,y\in\mathfrak{g}_1$. El homomorfismo θ es un *isomorfismo* de álgebras de Lie si θ es un homomorfismo biyectivo.
Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ subespacios vectoriales de $\mathfrak{g}$. Se define el producto $[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]$ como el subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ generado por todos los productos $[x,y]$ para $x\in\mathfrak{h}$, $y\in\mathfrak{k}$.
Una *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$. Un *ideal* de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ tal que $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\subseteq\mathfrak{h}$. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es llamada *abeliana* si $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=0$.
Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, se define la siguiente sucesión $\mathfrak{g}^1,\mathfrak{g}^2,\mathfrak{g}^3\dots$ de subespacios vectoriales de $\mathfrak{g}$, de forma inductiva por

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}].$$

Ahora si $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{k}$ son ideales de $\mathfrak{g}$, entonces $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ es también un ideal de $\mathfrak{g}$. Así, todos los subespacios vectoriales $\mathfrak{g}^i$ son ideales de $\mathfrak{g}$. Dado que

$$\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}^n$$

se obtiene una serie descendiente de ideales de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \mathfrak{g}^3 \cdots.$$

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es llamada *nilpotente* si $\mathfrak{g}^i = 0$ para algún i. Por lo tanto, cada álgebra de Lie abeliana es nilpotente.
Sea $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Se define una sucesión diferente de ideales de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{h}^{(0)} = \mathfrak{h},\ \mathfrak{h}^{(n+1)} = [\mathfrak{h}^{(n)}, \mathfrak{h}^{(n)}].$$

Los $\mathfrak{h}^{(i)}$ son todos ideales de $\mathfrak{g}$. Y nuevamente se tiene que

$$\mathfrak{h}^{(n+1)} = [\mathfrak{h}^{(n)}, \mathfrak{h}^{(n)}] \subseteq \mathfrak{h}^{(n)},$$

y por lo tanto una serie descendiente de ideales de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{(0)} \supseteq \mathfrak{h}^{(1)} \supseteq \mathfrak{h}^{(2)} \supseteq \cdots.$$

Se dice que el ideal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es *soluble* si $\mathfrak{h}^{(i)} = 0$. En particular se dice que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es soluble si $\mathfrak{g}^{(i)} = 0$ para algún i. Dado que $\mathfrak{g}^{(k)} \subseteq \mathfrak{g}^{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se obtiene que toda álgebra de Lie nilpotente es soluble.

Se puede probar que toda álgebra de Lie admite un único ideal soluble maximal $\mathfrak{r}$ llamado el *radical* de $\mathfrak{g}$. Se dice que $\mathfrak{g}$ es *semisimple* si su radical $\mathfrak{r}$ es cero. Se dice que $\mathfrak{g}$ es *simple* si $\mathfrak{g}$ no es abeliana y sus únicos ideales son 0 y $\mathfrak{g}$.

1.2. Subálgebras de Cartan

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ una subálgebra de $\mathfrak{g}$. Se define el *normalizador* de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$ como $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] \in \mathfrak{h}, \forall y \in \mathfrak{h}\}$. Es fácil ver que $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$ es la subálgebra maximal de $\mathfrak{g}$ que contiene a $\mathfrak{h}$ como ideal.
La subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ es llamada una *subálgebra de Cartan* de $\mathfrak{g}$ si esta satisface las siguientes dos condiciones:

(a) $\mathfrak{h}$ es nilpotente.

(b) $\mathfrak{h}$ es su propio normalizador, es decir, $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$.

Se sabe que toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tiene subálgebras de Cartan. También se conoce el siguiente resultado.

Teorema 1.2 *Si* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra de Cartan de un álgebra de Lie semisimple* $\mathfrak{g}$*, entonces* $\mathfrak{h}$ *es una subálgebra abeliana maximal de* $\mathfrak{g}$*.*

La demostración de este resultado se puede ver en [SER].

1.3. Sistema de raíces

Sea V un espacio vectorial real y $\alpha \in V$ con $\alpha \neq 0$. Una *reflexión* con vector α es un automorfismo s_α de V que satisface las siguientes dos condiciones:

(i) $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$,

(ii) El conjunto $H := \{v \in V \mid s_\alpha(v) = v\}$ es un hiperplano de V.

Sea V^* el espacio vectorial dual de V. Tómese como α^* al único elemento de V^* tal que $\alpha^*(\alpha) = 2$ y $\alpha^*(h) = 0$ para toda $h \in H$. Entonces se tiene que $s_\alpha(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$ para toda $x \in V$. A α^* se le llama la *raíz inversa* de α.
Un subconjunto R de V es un *sistema de raíces* de V si:

(1) R es finito y R genera a V,

(2) para cada $\alpha \in R$, la reflexión s_α deja invariante a R,

(3) si $\alpha, \beta \in R$ entonces $s_\alpha(\beta) - \beta$ es un múltiplo entero de α.

La dimensión de V es por definición el *rango* de R. Un sistema de raíces R se dice que es *reducido* si para cada $\alpha \in R$ los únicos múltiplos de α en R son α y $-\alpha$.
Sea R un sistema de raíces de un espacio vectorial V. El *grupo de Weyl* de R es el subgrupo $W(R)$ de $GL(V)$ generado por las reflexiones s_α con $\alpha \in R$.

1.4. Bases

Sea R un sistema de raíces en V. Una base para R es un subconjunto S de R que satisface:

(i) S es una base para el espacio vectorial V,

(ii) cada $\beta \in R$ se puede escribir como una combinación lineal

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha,$$

donde los coeficientes m_α son enteros y todos tienen el mismo signo (es decir, todos los coeficientes son ≥ 0 ó todos son ≤ 0).

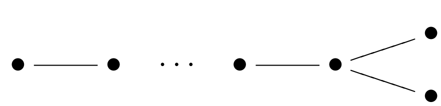
Se sabe que todo sistema de raíces admite almenos una base.

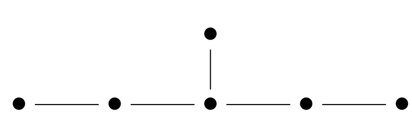
1.5. Matriz de Cartan y gráfica de Coxeter

La matriz de Cartan de un sistema de raíces R, con respecto a la base elegida S, es la matriz $A = (A_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in S}$ donde $A_{\alpha\beta} := \beta^*(\alpha)$. Además, $A_{\alpha\alpha} = 2$, $A_{\alpha\beta} \leq 0$ si $\alpha \neq \beta$. Más aún, si $\alpha \neq \beta$ entonces $A_{\alpha\beta} = 0, -1, -2, -3$. También se sabe que un sistema reducido de raíces está determinado hasta isomorfismo por su matriz de Cartan.
Sea R un sistema de raíces y sea S una base para R. La gráfica de Coxeter de R con respecto a S se define como sigue: los vértices son los elementos de S, dos vértices distintos α y β se unen por $A_{\alpha\beta}A_{\beta\alpha}$ aristas llenas.
Cada gráfica de Coxeter conexa asociada a un sistema de raíces es isomorfa a una de las gráficas de la siguiente lista:

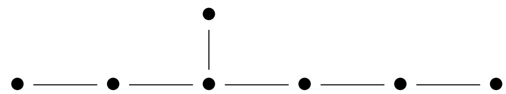
$\mathbb{A}_n$ $(n \geq 1)$:

$\mathbb{B}_n$ $(n \geq 2)$:

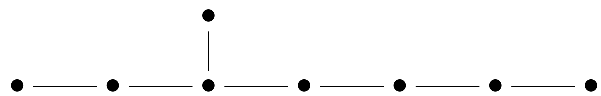
$\mathbb{D}_n$ $(n \geq 4)$: 

$\mathbb{E}_6$: 

$\mathbb{E}_7$:



$\mathbb{E}_8$:



$\mathbb{F}_4$:

$\mathbb{G}_2$:

1.6. La descomposición de Cartan y el teorema de Serre

A lo largo de esta sección $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie semisimple compleja y $\mathfrak{h}$ denotará una subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.
Sea α es un elemento del espacio dual $\mathfrak{h}^*$ de $\mathfrak{h}$. El conjunto

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{x \in \mathfrak{g} \mid [h,x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.
A cada $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\alpha \neq 0$ y $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ se le llama una *raíz de* $\mathfrak{g}$ relativa a $\mathfrak{h}$; el conjunto de todas las raíces es denota por R. El siguiente resultado es conocido (ver por ejemplo [SER]).

Teorema 1.3 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ *como espacios vectoriales. Más aún, R es un sistema de raíces reducido del espacio vectorial complejo $\mathfrak{h}^*$.*

Sea R un sistema de raíces de un espacio vectorial complejo V. Por consistencia con la notación anterior, el espacio dual de V se denotará con $\mathfrak{h}$, así se tiene que $V = \mathfrak{h}^*$. Sea $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ una base para R, sean $h_1, \dots, h_n$ las raíces inversas de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y sea $A = (A_{ij}) = (\alpha_j(h_i))$ la matriz de Cartan de R con respecto a S. El siguiente resultado se conoce, ver por ejemplo [SER].

Teorema 1.4 *[SER] Sea $\mathfrak{g}_4$ el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, f_i, h_i para $i = 1, 2, \dots, n$ y las relaciones:*

(R1) $[h_i, h_j] = 0$,

(R2) $[e_i, f_i] = h_i$, $[e_i, f_j] = 0$ *si* $i \neq j$,

(R3) $[h_i, e_j] = -A_{ij} e_j$, $[h_i, f_j] = A_{ij} f_j$,

(R4) $(\mathbf{ad}\ e_j)^{1+n}(e_i) = 0$, $(\mathbf{ad}\ e_j)^{1+n}(f_i) = 0$, $n = \text{máx}\{0, -A_{ij}\}$.

Entonces $\mathfrak{g}_4$ *es un álgebra de Lie semisimple con subálgebra de Cartan* $\mathfrak{h}$ *generada por los elementos* h_i. *El conjunto de raíces de* $\mathfrak{g}$ *es* R. *Además se tiene que* $\mathfrak{g}_\lambda = 0$ *si* $\lambda \notin R$.

1.7. El álgebra de Lie asociada a una forma unitaria

La notación y los resultados contenidos en esta sección y en la siguiente están se basan en [BKL].
Una forma unitaria es una forma cuadrática

$$q : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}, q(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j,$$

con coeficientes enteros $q_{ij} \in \mathbb{Z}$. Cada forma unitaria q tiene asociada una matriz casi-Cartan A dada por $A_{ij} = q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j)$, donde $c_1, \ldots, c_N$ es la base canónica de $\mathbb{Z}^N$. Si $A_{ij} \leq 0$ para todo $i \neq j$ entonces A es una matriz de Cartan.
A cada forma unitaria $q(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j$ se le asocia una bigráfica $B(q)$, de la siguiente forma; el conjunto $\{1, \ldots, N\}$ será el conjunto de vértices de la bigráfica, y para $i < j$ se trazan $-A_{ij}$ aristas llenas (A_{ij} aristas punteadas) si $A_{ij} < 0$ (si $A_{ij} > 0$). De forma conversa, dada una bigráfica Δ sin lazos y con conjunto de vértices $\{1, \ldots, N\}$, se le asocia una forma unitaria $q_\Delta(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j$, con $q_{ij} = -n(i,j)$ si hay $n(i,j)$ aristas llenas entre los vértices i y j. Y con $q_{ij} = n(i,j)$ si hay $n(i,j)$ aristas punteadas entre los vértices i y j.
Sean q y q' formas unitarias, se dice que q y q' son $\mathbb{Z}-$equivalentes si existe una transformación $\mathbb{Z}-$invertible $T : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}^N$, tal que $q' = q \circ T$.

Se sabe que toda forma unitaria positiva q es $\mathbb{Z}-$equivalente a una forma q_Δ, donde Δ es una bigráfica que sólo tiene aristas llenas y además es una unión disjunta de diagramas de Dynkin (ver por ejemplo [O]). A la bigráfica Δ se le llama el *tipo de* Dynkin asociado a q.

Dada una forma unitaria positiva q cuya matriz asociada es una matriz de Cartan ($A_{ij} \leq 0$), se escribe $q = q_\Delta$, donde Δ es el *tipo de Dynkin* asociado a q, es decir, si Δ es una unión disjunta de diagramas de Dynkin $\mathbb{A}_N, \mathbb{D}_N, \mathbb{E}_N$. Sea $\mathcal{F}$ el álgebra de Lie libre compleja con generadores e_i, e_{-i}, h_i $(1 \leq i \leq N)$. Se toma $I(q)$ el ideal generado por las siguientes relaciones:

$R_1(q)$ $[h_i, h_j] = 0$ para toda i, j,

$R_2(q)$ $[h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j}$, para toda i, j, y donde $\varepsilon = \pm 1$,

$R_3(q)$ $[e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i$ para toda i, donde $\varepsilon = \pm 1$,

$R_\infty(q)$ $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$ si $q(\sum\limits_{j=1}^{t} \varepsilon_j c_{i_j}) > 1$ para $\varepsilon_j = \pm 1$.

Para las relaciones $R_\infty(q)$ se usan corchetes multiples definidos de forma inductiva por $[x_1, x_2, \ldots, x_t] = [x_1, [x_2, \ldots, x_t]]$. Claramente las relaciones de Serre usuales,

$R_4(q)$ $(\mathbf{ad}\ \ e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0$ donde $n = \text{máx}\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\}$, para $1 \leq i, j \leq n$ y $\varepsilon, \delta = \pm 1$,

son un caso especial del conjunto infinito de relaciones $R_\infty(q)$. El álgebra de Lie asociada a la forma unitaria q es el álgebra de Lie cociente $\mathfrak{g}_\infty(q) := \mathcal{F}/I(q)$.
Nótese que $\mathfrak{g}_\infty(q)$ es un álgebra de Lie $\mathbb{Z}^N-$graduada, donde los grados están dados por $grado(e_i) = c_i, grado(e_{-i}) = -c_i, grado(h_i) = 0$. En general, se consideran morfismos de álgebras de Lie graduadas sobre $\mathbb{Z}^N$, es decir, morfismos de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ tales que existe una función lineal $\Phi : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}^N$ que satisface $\varphi(\mathfrak{g}_\alpha) \subseteq H_{\Phi(\alpha)}$. Para cada monomio, es decir, un elemento que se obtiene de los generadores usando iterativamente el corchete, el grado está bien definido. Todos los elementos de grado α forman el subespacio $\mathfrak{g}(q)_\alpha$. Obsérvese que $\mathfrak{g}(q)_\alpha$ es generado por los monomios de grado α.

Lema 1.5 *Para $\varepsilon_j = \pm 1$ y $1 \leq i_j \leq N$, se tiene la siguiente propiedad en $\mathfrak{g}_\infty(q)$,*

$$[h_k, e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = -(\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j A_{k i_j})[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}]$$

y para cada vector distinto de cero $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, el espacio vectorial $\mathfrak{g}(q)_\alpha$ es generado por todas las expresiones $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}]$ con $\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j c_{i_j} = \alpha$.

Demostración. La primera formula se deduce fácilmente por inducción usando $R_2(q)$, la parte restante se deduce del hecho de que $\mathfrak{g}(q)_\alpha$ es generado por los corchetes multiples. ■

1.8. Inflaciones y deflaciones

Dada una forma unitaria $q : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}$ se define para cada $r \neq s$ y $\sigma = \pm 1$ una transformación lineal T_{sr}^σ mediante $T_{sr}^\sigma c_i = c_i$ para cada $i \neq r$ y $T_{sr}^\sigma c_r = c_r + \sigma c_s$. Otra transformación lineal I_r esta dada por $I_r(c_i) = c_i$ para cada $i \neq r$ y $I_r(c_r) = -c_r$.
Nótese que si $q_{rs} = \pm 1 =: \sigma$ ($q_{rs} = q_{sr}$ si $s < r$) la forma $q' = q \circ T_{sr}^\sigma$ es nuevamente una forma unitaria. En este caso se dice que q' se obtiene de q, por medio de una *deflación* (si $q_{sr} = -1$) ó por medio de una *inflación* (si $q_{sr} = 1$). Más aún, se dice que q' se obtiene de q por medio de un *cambio de signo* si $q' = q \circ I_r$ para algún r. Dos formas unitarias q, q' son *di−equivalentes* si existe una sucesión de formas unitarias $q^{(0)} = q, q^{(1)}, \ldots, q^{(t)} = q'$ tal que $q^{(i)}$ se obtiene de $q^{(i-1)}$ por medio de una deflación, inflación ó un cambio de signo para cada $i = 1, \ldots, t$. Con $q \sim_{\text{di}} q'$ se denotará el hecho de que q y q' son *di*−equivalentes. Las transformaciones deflación, inflación y cambio de signo serán llamadas *transformaciones elementales*.
Se dirá que las formas unitarias q y q' son *equivalentes* si $q' = q \circ T$ donde T es una matriz entera $\mathbb{Z}$−invertible.
A cada forma unitaria $q : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}$ se le asocia una bigráfica $B(q)$ con vértices $1, \ldots, N$ y aristas definidas como sigue: Dos vértices distintos i y j se unen por $|q_{ij}|$ aristas llenas si $q_{ij} < 0$ y por q_{ij} aristas punteadas si $q_{ij} > 0$.
Cada forma unitaria positiva definida tiene un único tipo de Dynkin Δ tal que q es equivalente con q_Δ. El hecho de que dos formas unitarias q y q' sean

equivalentes se denotará por $q \sim q'$.

Teorema 1.6 *Si* $q \sim_{di} q'$ *entonces las álgebras de Lie* $\mathfrak{g}_\infty(q)$ *y* $\mathfrak{g}_\infty(q')$ *son isomorfas.*

Demostración. Es claro que sólo se tiene que verificar la afirmación para los siguientes casos $q' = q \circ T^\sigma_{sr}$ donde $\sigma = -q_{sr} = \pm 1$, $q' = q \circ I_r$, puesto que el caso general se sigue por inducción.
Sean e_i, e_{-i}, h_i, e'_i, e'_{-i}, h'_i los generadores de $\mathfrak{g}_\infty(q)$ y $\mathfrak{g}_\infty(q')$ respectivamente. Con A, A' se denotarán las matrices de Cartan de q y q'. Se inicia con el primer caso $q' = q \circ T^\sigma_{sr}$. Se definen

$$\widetilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} \sigma[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \qquad \widetilde{h}_i = \begin{cases} h_r + \sigma h_s, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r. \end{cases}$$

Se mostrará que estos elementos satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_\infty(q')$. La relación $R_1(q')$ es obvia. A continuación se verificarán $R_2(q')$ y $R_3(q')$. Si $i, j \neq r$ entonces $[\widetilde{h}_i, \widetilde{e}_{\varepsilon j}] = [h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j} = -\varepsilon A'_{ij} \widetilde{e}_{\varepsilon j}$ y $[\widetilde{e}_{\varepsilon i}, \widetilde{e}_{-\varepsilon i}] = [e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i = \varepsilon \widetilde{h}_i$. Así se obtiene que

$$\begin{aligned}
[\widetilde{h}_i, \widetilde{e}_{\varepsilon r}] &= [h_i, \sigma[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]] && \text{(por definición)} \\
&= \sigma[e_{\varepsilon r}, [h_i, e_{\sigma\varepsilon s}]] + \sigma[e_{\sigma\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, h_i]] && \text{(por identidad de Jacobi)} \\
&= -\sigma^2 \varepsilon A_{is}[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] + \sigma\varepsilon A_{ir}[e_{\sigma\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] && \text{(por } R_2(q) \text{ y bilinealidad)} \\
&= -\varepsilon(A_{ir} + \sigma A_{is})\sigma[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] \\
&= -\varepsilon A'_{ir} \widetilde{e}_{\varepsilon r} && (A'_{ir} = A_{ir} + \sigma A_{is}).
\end{aligned}$$

De forma similar se tiene que

$$\begin{aligned}
[\widetilde{h}_r, \widetilde{e}_{\varepsilon j}] &= [h_r + \sigma h_s, e_{\varepsilon j}] \\
&= -(A_{rj} + \sigma A_{sj}) e_{\varepsilon j} \\
&= -\varepsilon A'_{rj} \widetilde{e}_{\varepsilon j}.
\end{aligned}$$

Para completar $R_2(q')$ se calcula

$$\begin{aligned}
[\widetilde{h}_r, \widetilde{e}_{\varepsilon r}] &= \sigma[h_r + \sigma h_s, [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]] \\
&= \sigma[e_{\varepsilon r}, [h_r + \sigma h_s, e_{\sigma\varepsilon s}]] + \sigma[e_{\varepsilon s}, [e_{\sigma\varepsilon r}, h_r + \sigma h_s]] \\
&= \sigma(-\sigma\varepsilon A_{rs} - \sigma^2 \varepsilon A_{ss})[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] + \sigma(\varepsilon A_{rr} + \sigma\varepsilon A_{sr})[e_{\sigma\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}] \\
&= -\varepsilon(A_{rr} + \sigma A_{sr} + \sigma A_{rs} + \sigma^2 A_{ss})\sigma[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}] \\
&= -\varepsilon A'_{rr} \widetilde{e}_{\varepsilon r},
\end{aligned}$$

donde en la última ecuación se usa que $A_{ss} = A_{rr} = 2$, $A_{sr} = A_{rs} = -\sigma = \pm 1$ y $A'_{rr} = 2$. Para completar $R_3(q')$ se hace uso repetidamente de la identidad de Jacobi y de la igualdad $[e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon r}] = 0$ (la cual se obtiene de $R_4(q)$) en la tercer linea del siguiente cálculo

$$\begin{aligned}
[\widetilde{e}_{\varepsilon r}, \widetilde{e}_{-\varepsilon r}] &= \sigma^2[[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], [e_{-\varepsilon r}, e_{-\sigma\varepsilon s}]] \\
&= [e_{-\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{-\sigma\varepsilon s}]] + [e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{-\varepsilon r}, [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]]] \\
&= [e_{-\varepsilon r}, [[e_{-\sigma\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}]] + [e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{\sigma\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon r}]]] \\
&= -\sigma\varepsilon[e_{-\varepsilon r}, [h_s, e_{\varepsilon r}]] + \varepsilon[e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{\sigma\varepsilon s}, h_r]] \\
&= \sigma\varepsilon^2 A_{sr}[e_{-\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}] + \sigma\varepsilon^2 A_{rs}[e_{-\sigma\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}] \\
&= -\sigma\varepsilon A_{sr} h_r - \sigma^2\varepsilon A_{sr} h_s \\
&= \sigma^2\varepsilon h_r + \sigma^2\varepsilon h_s \\
&= \varepsilon\widetilde{h}_r.
\end{aligned}$$

Nuevamente se usa $A_{sr} = A_{rs} = -\sigma$ al final. Para $R_\infty(q')$ se observa que si $q(\alpha) > 1$ entonces por Lema 1.7 y $R_\infty(q)$ se tiene que $\mathfrak{g}(q)_\alpha = 0$. Sea $\alpha' = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j c_{i_j}$ tal que $q'(\alpha') > 1$. Se debe mostrar que $X = [\widetilde{e}_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, \widetilde{e}_{\varepsilon_t i_t}] = 0$.

Se tiene que $X \in \mathfrak{g}_\infty(q)_{\widetilde{\alpha}}$, donde $\widetilde{\alpha} = \sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j \widetilde{c}_{i_j}$ con $\widetilde{c}_a = c_a$ si $a \neq r$ y $\widetilde{c}_r = c_r + \sigma c_s$, o de manera abreviada $\widetilde{c}_a = T^\sigma_{sr} c_a$, para cada a. Por lo tanto $\widetilde{\alpha} = T^\sigma_{sr}\alpha'$ y así se tiene que $q(\widetilde{\alpha}) = q(T^\sigma_{sr}\alpha') = q'(\alpha') > 1$. Lo cual implica que $\mathfrak{g}_\infty(q)_{\widetilde{\alpha}} = 0$ por la observación anterior.
Sea L la subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}_\infty(q)$ generada por los elementos $\widetilde{e}_i$, $\widetilde{e}_{-i}$, $\widetilde{h}_i$, los cuales por lo anterior satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_\infty(q')$. Así, se obtiene un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie graduadas $\varphi : \mathfrak{g}_\infty(q') \to L$, el cual manda $e'_{\varepsilon i}$ a $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y h'_i a $\widetilde{h}_i$.
Usando $R_4(q)$ y Lema 4.2 en la segunda línea se tiene que

$$\begin{aligned}
[\sigma\widetilde{e}_{-\sigma\varepsilon s}, \widetilde{e}_{\varepsilon r}] &= \sigma^2[e_{-\sigma\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}]] \\
&= [e_{\varepsilon r}, [e_{-\sigma\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}]] \\
&= -\sigma\varepsilon[e_{\varepsilon r}, h_s] \qquad \text{(por } R_3(q)) \\
&= -\sigma\varepsilon^2 A_{sr} e_{\varepsilon r} \qquad \text{(por } R_2(q)) \\
&= e_{\varepsilon r}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $L = \mathfrak{g}_\infty(q)$. Obsérvese que $q'_{sr} = -q_{sr} =: -\sigma'$. Repitiendo el procedimiento y definiendo elementos

$$\widetilde{e}'_{\varepsilon i} = \begin{cases} \sigma'[e'_{\varepsilon r}, e'_{\sigma'\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e'_{\varepsilon r}, & \text{si } i \neq r \end{cases} \qquad \widetilde{h}'_i = \begin{cases} h'_r + \sigma' h'_s, & \text{si } i = r \\ h'_i, & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

se obtiene un homomorfismo sobreyectivo de algebras de Lie graduadas $\psi : \mathfrak{g}_\infty(q) \to \mathfrak{g}_\infty(q')$ que manda $e_{\varepsilon i}$ a $\widetilde{e}'_{\varepsilon i}$ y h_i a $\widetilde{h}'_i$.
Para demostrar que φ es en realidad un isomorfismo, se mostrará que $\varphi \circ \psi = id$, la demostración de que $\psi \circ \varphi = id$ es similar. Para $i \neq r$ se tiene que $\varphi \circ \varphi(e_{\varepsilon i}) = e_{\varepsilon i}$, $\varphi \circ \varphi(h_i) = h_i$. Más aún, $\varphi \circ \varphi(h_r) = \varphi(h'_r + \sigma' h'_s) = h_r + \sigma h_s + \sigma' h_s = h_r$ de que $\sigma' = -\sigma$.
Usando que $[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma'\varepsilon s}] = [e_{\varepsilon r}, e_{-\sigma\varepsilon s}] = 0$ (lo cual se sigue por $R_4(q)$) en la cuarta ecuación se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi \circ \varphi(e_{\varepsilon r}) &= \varphi(\sigma'[e'_{\varepsilon r}, e'_{\sigma'\varepsilon s}]) \\ &= \sigma'[\varphi(e'_{\varepsilon r}), \varphi(e'_{\sigma'\varepsilon s})] \\ &= \sigma'\sigma[[e_{\varepsilon r}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{\sigma'\varepsilon s}] \\ &= -[[e_{\sigma'\varepsilon s}, e_{\sigma\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}] \\ &= -\sigma'\varepsilon[h_s, e_{\varepsilon r}] \\ &= \sigma'\varepsilon^2 A_{sr} e_{\varepsilon r} \\ &= -\sigma'\sigma e_{\varepsilon r} \\ &= e_{\varepsilon r}. \end{aligned}$$

Así sólo nos resta el caso donde $q' = q \circ I_r$. Obsérvese que $q'_{ri} = -q_{ri}$ para cada $i \neq r$, $q'_{ij} = q_{ij}$ para cada $i, j \neq r$. Nuevamente los elementos

$$\widetilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} e_{-\varepsilon r}, & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r \end{cases} \qquad \widetilde{h}_i = \begin{cases} -h_r, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_\infty(q')$. La verificación es similar a la del caso anterior. La subálgebra de Lie generada por $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\widetilde{h}_i$ (i=1,...,N y $\varepsilon = \pm 1$) es claramente $\mathfrak{g}_\infty(q)$. Por lo tanto se obtiene un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie graduadas $\varphi : \mathfrak{g}_\infty(q') \to \mathfrak{g}_\infty(q)$ el cual manda $e'_{\varepsilon i}$ a $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y h'_i a $\widetilde{h}_i$. Es fácil verificar que $\varphi \circ \varphi = id$, de aquí que φ es un isomorfismo de álgebras de Lie graduadas. Esto finaliza la demostración. ■
Sea Δ un diagrama de Dynkin, $\Delta = \mathbb{A}_N (N \geq 1)$, $\mathbb{D}_N (N \geq 4)$, $\mathbb{E}_N (N =$

$6,7,8)$. Sea $\mathfrak{g}_4(\Delta)$ el álgebra de Lie en los generadores e_i, e_{-i}, h_i y tal que satisfacen las relaciones $(R1)-(R4)$. Finalmente, con q_Δ se denotará la forma unitaria asociada a Δ la cual es por supuesto positiva.

Proposición 1.7 *Para cada diagrama Dynkin Δ se tiene que*

$$\mathfrak{g}_4(\Delta)=\mathfrak{g}_\infty(q_\Delta).$$

Demostración. Los generadores de $\mathfrak{g}_4(\Delta)$ satisfacen las relaciones de Serre $(R1)-(R4)$. Ahora usando la bien conocida descomposición en espacios de raíces de $\mathfrak{g}_4(\Delta)$ se obtiene que todas las relaciones $R_\infty(q_\Delta)$ se satisfacen. ■
El hecho de que las relaciones son descritas por un conjunto infinito $R_\infty(q)$ no es satisfactorio. En el próximo lema se mostrará que para q positiva basta tomar un subconjunto finito de relaciones $R_1(q)-R_\infty(q)$.
Más precisamente, se denotará por $R_u(q)$ $(u=1,2,3,\infty)$ al conjunto de relaciones definido por la forma cuadrática $q:\mathbb{Z}^N\to\mathbb{Z}$ (ver Sección 1.7), por $\widehat{\mathfrak{g}}(q)$ al álgebra de Lie libre generada por $\{e_i, e_{-i}, h_i \mid 1\le i\le N\}$ y por $I(q)$ al ideal de $\widehat{\mathfrak{g}}(q)$ generado por $R_1(q)-R_\infty(q)$.

Lema 1.8 *Si T es una deflación, inflación o un cambio de signo para q positiva y $q'=q\circ T$ entonces el ideal $I(q)$ es generado por un subconjunto finito de las relaciones $R_1(q)-R_\infty(q)$ si y sólo si $I(q')$ es generado por un subconjunto finito de las relaciones $R_1(q')-R_\infty(q')$.*

Demostración. Para $u=3,\infty$ sea $I_u(q)$ el ideal de $\widehat{\mathfrak{g}}(q)$ generado por $R_1(q)-R_u(q)$ y $\mathfrak{g}_u(q)=\widehat{\mathfrak{g}}(q)/I_u(q)$. También se toma $I_0(q)=0$, $\mathfrak{g}_0(q)=\widehat{\mathfrak{g}}(q)$. Se denotará con $\pi_{uv}:\mathfrak{g}_v(q)\to\mathfrak{g}_u(q)$ a la proyección canónica para $v\le u$. De manera similar se define $I_u(q')$, $\mathfrak{g}_u(q')$ y π'_{uv}.
Primero se verifica el caso cuando $T=T^\sigma_{sr}$ es una deflación o una inflación para q. Se definen $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$, $\widetilde{h}_i$ como en la demostración del Teorema 1.6. Se tiene así un morfismo $\Phi_{00}:\widehat{\mathfrak{g}}(q')\to\widehat{\mathfrak{g}}(q)$, el cual manda $e'_{\varepsilon i}$ a $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y h'_i a $\widetilde{h}_i$. En la demostración del Lema 1.6 se mostró que los elementos $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$, $\widetilde{h}_i$ en $\mathfrak{g}_\infty(q)$ satisfacen las relaciones $R_1(q')-R_3(q')$, es decir, Φ_{00} induce un morfismo $\Phi_{43}:\mathfrak{g}_3(q')\to\mathfrak{g}_4(q)$ que hace el diagrama del lado izquierdo conmutativo, donde φ es el isomorfismo en la demostración del Teorema 1.6:

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathfrak{g}}(q') \arrow[r, "\Phi_{00}"] \arrow[d, "\pi'_{30}"'] & \widehat{\mathfrak{g}}(q) \arrow[dd, "\pi_{40}"] \\
\mathfrak{g}_3(q') \arrow[dr, "\Phi_{43}"] \arrow[dd, "\pi'_{\infty 3}"'] & \\
 & \mathfrak{g}_4(q) \arrow[d, "\pi_{\infty 4}"] \\
\mathfrak{g}(q') \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{g}_\infty(q)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathfrak{g}}(q') \arrow[r, "\Phi_{00}"] \arrow[d, "\pi'_{30}"'] & \widehat{\mathfrak{g}}(q) \arrow[dd, "\pi_{40}"] \\
\mathfrak{g}_3(q') \arrow[dr, "\Phi_{43}"] \arrow[ddd, "\pi'_{\infty 3}"'] & \\
 & \mathfrak{g}_4(q) \arrow[d, "\pi_{54}"] \\
 & \mathfrak{g}_5(q) \arrow[d, "\pi_{\infty 5}"] \\
\mathfrak{g}(q') \arrow[ur, "\Phi_{5\infty}"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathfrak{g}_\infty(q)
\end{tikzcd}
$$

Supóngase ahora que existe un subconjunto finito de relaciones de $R_1(q') - R_\infty(q')$ que generan a $I(q')$, es decir, $I(q') = \langle R_1(q'), R_2(q'), R_3(q'), \rho'_1, \ldots, \rho'_n \rangle$ donde cada ρ'_i está en $R_\infty(q')$.
Se denota con t'_i a la longitud de ρ'_i y con α'_i el grado de ρ'_i. Más aún, se toma $\rho_i = \Phi_{00}(\rho'_i)$. Nótese que la longitud t_i de ρ_i y el grado α_i de ρ_i satisface $t_i \leq 2t'_i$ y $T\alpha_i = \alpha'_i$, y que en general $grado(\Phi(\alpha)) = T(grado(\alpha))$. Por lo tanto $q(\alpha_i) = q(grado(\rho_i)) = q(T(grado(\rho'_i))) = q'(\alpha'_i) > 1$ y como $\{\rho_1, \ldots, \rho_n\} \subset (R5)_q \subset (R5)_q$ es el siguiente conjunto de relaciones

$R_5(q)$ $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$ si $grado([e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}]) = \alpha_i$ y $t \leq t_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Entonces, por construcción, los elementos $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$, $\widetilde{h}_i$ en $\mathfrak{g}_\infty(q)$ satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_3(q'), \rho'_1, \ldots, \rho'_N$ y por lo tanto, se obtiene un morfismo $\Phi_{5\infty} : \mathfrak{g}(q') \to \mathfrak{g}_5(q)$ que hace conmutativo el diagrama derecho de arriba.
Dado que $\varphi = \pi_{\infty 5}\Phi_{5\infty}$ es un isomorfismo, se tiene que $\Phi_{5\infty}$ es inyectivo. Ahora usando el hecho que Φ_{43} y π_{54} son sobreyectivos, se concluye que $\Phi_{5\infty}$ es sobreyectivo y por lo tanto $\Phi_{5\infty}$ es un isomorfismo. De donde se sigue que $\pi_{\infty 5}$ es un isomorfismo. Del hecho que $R_1(q) - R_5(q)$ son todas finitas, se sigue que $I(q) = I_5(q)$ es generado por un subconjunto finito de las relaciones $R_1(q) - R_\infty(q)$.
El caso cuando T es un cambio de signo es inmediato y así, el resultado se deduce por el hecho de que T^{-1} es una inflación, deflación o cambio de signo de q' con $q = q' \circ T^{-1}$. ■

Proposición 1.9 *Si q es una forma unitaria positiva, entonces existe un subconjunto finito de relaciones de $R_1(q) - R_\infty(q)$ el cual es suficiente para* *definir* $\mathfrak{g}_\infty(q)$.

Demostración. Se deduce directamente del Teorema 1.6, del Lema anterior y de la Proposición 1.7. ■

El objetivo de este trabajo es encontrar un conjunto más explícito de estas relaciones que son suficientes para definir el álgebra $\mathfrak{g}_\infty(q)$.

1.9. Raíces y relaciones finitas

Sea q una forma unitaria positiva. Considérese el conjunto

$$M = \{[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] \mid q(\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j c_j) = 1, \varepsilon_j = \pm 1\}.$$

Se define $R_5(M)$ como el conjunto de las siguientes relaciones:

$$[e_{\varepsilon_1 i_1}, e_{\varepsilon_2 i_2}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$$

cuando $[e_{\varepsilon_2 i_2}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] \in M$ y $q(\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j c_j) > 1$.

Se sabe que el número de raíces de una forma unitaria positiva es finito (ver por ejemplo [O], [R]). Así se tiene que M es un conjunto finito y por lo tanto $R_5(M)$ también es un conjunto finito. Más aún, es claro que bastan las relaciones $R_1(q), R_2(q), R_3(q), R_4(q), R_5(M)$ para definir el álgebra $\mathfrak{g}_\infty(q)$. Sin embargo, nos preguntamos si existe un subconjunto propio de estas relaciones que baste para definir el álgebra $\mathfrak{g}_\infty(q)$. En la siguiente sección se verá la propuesta de este trabajo.

1.10. La propuesta de este trabajo

Sea q una forma unitaria . Un *ciclo* en q es una tupla de indices $(i_1, \ldots, i_t)$ tales que $q_{i_a i_b} \neq 0$ si y sólo si $a - b \equiv \pm 1 \; mod \; t$. Se definen las relaciones siguientes: $R_5(q)$ $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$ donde $(i_1, \ldots, i_t)$ es un ciclo en q y $\varepsilon_t = \pm 1$, $\varepsilon_l = -q_{i_l, i_{l+1}} \varepsilon_{l+1}$ para $1 \leq l \leq t-1$.

Sea $\mathfrak{g}_5(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores $e_i, e_{-i}, h_i (1 \leq i \leq N)$ con relaciones $R_1(q) - R_5(q)$.

El objetivo principal de este trabajo es demostrar el siguiente resultado concerniente a las álgebras de Lie $\mathfrak{g}_5(q)$ asociadas a formas unitarias positivas.

Teorema 1.10 *Sean q y q' formas unitarias positivas. Entonces se tiene que*

(a) $q \sim q'$ si y sólo si $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$,

(b) $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_4(q_\Delta)$, donde Δ es el tipo de Dynkin de q.

Observación 1.11 *Para demostrar el Teorema 1.10 es suficiente demostrar la siguiente implicación: Si $q \sim q'$ entonces $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$.*

Demostración. Para mostrar (b), sea $q = q_\Delta$, entonces se tiene que $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q_\Delta)$, pero $\mathfrak{g}_5(q_\Delta) = \mathfrak{g}_4(q_\Delta)$ puesto que no hay ciclos en q_Δ y consecuentemente $R_5(q)$ es el conjunto vacío.
Ahora, supóngase que $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$. Si Δ es el tipo de Dynkin de q y Δ' es el tipo de Dynkin de q' entonces, se sigue de (b) que $\mathfrak{g}_4(q_\Delta) \simeq \mathfrak{g}_4(q_{\Delta'})$ y por lo tanto $\Delta = \Delta'$, ver por ejemplo [SER]. Consecuentemente se tiene que $q \sim q_\Delta = q_{\Delta'} \sim q'$. ■
Si una forma unitaria q satisface $(-q_{i_1 i_2})(-q_{i_2 i_3}) \cdots (-q_{i_{t-1} i_t})(q_{i_t i_1}) = -1$ para cada ciclo $(i_1, \ldots, i_t)$ en q, se dice que q satisface la *condición de ciclo*. Por ejemplo, si q es una forma unitaria positiva definida entonces q satisface la condición de ciclo.

Observación 1.12 *El conjunto de relaciones $R_5(q)$ es un subconjunto de $R_\infty(q)$.*

Demostración. De que q es positiva definida, para cada ciclo $\gamma = (i_1, \ldots, i_t)$ se tiene que $(-q_{i_1 i_2})(-q_{i_2 i_3}) \cdots (-q_{i_{t-1} i_t})(q_{i_t i_1}) = -1$, es decir, hay un número impar de coeficientes positivos a lo largo del ciclo γ. Por lo tanto,

$$\varepsilon_1 = \prod_{a=1}^{t-1} (-q_{i_a i_{a+1}}) = q_{i_t i_1} \varepsilon_t$$

y de aquí que

$$q(\sum_{a=1}^{t} \varepsilon_a c_{i_a}) = 1 + q_{i_1 i_t} \varepsilon_1 \varepsilon_t + q_{i_t i_{t-1}} \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} + q(\sum_{a=1}^{t-1} \varepsilon_a c_{i_a}) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2.$$

■

Para demostrar el Teorema 1.10 se hacen reducciones iteradas a situaciones más y más especiales, donde los pasos principales y las implicaciones son como sigue:

$$\text{Teorema } 1.10 \Leftarrow \text{Proposición } 2.7 \Leftarrow \text{Lema } 3.2 \Leftarrow \text{Lema } 3.5$$