Capítulo 3

Reducción a ciclos especiales y a monomios especiales

En este capitulo, se reducirá la demostración de la Proposición 2.7 a la verificación de que ciertos monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$.
Supóngase que q es positiva definida, $q_{rs} = -1$ y $q' = q \circ T_{sr}^{+1}$. Una vez más, se denotarán los generadores de $\mathfrak{g}_5(q)$ con e_i, e_{-i}, h_i y los generadores de $\mathfrak{g}_5(q')$ con e'_i, e'_{-i}, h'_i.
Entonces se definen los siguientes elementos en $\mathfrak{g}_5(q)$:

$$\widetilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \qquad \widetilde{h}_i = \begin{cases} h_r + h_s, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r. \end{cases} \tag{3.1}$$

Lema 3.1 *Si $q_{sr} = -1$ y $q' = q \circ T_{sr}^{+1}$, entonces los elementos $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ and $\widetilde{h}_i$ satisfacen las relaciones $R_1(q'), R_2(q'), R_3(q')$ y $R_4(q')$.*

Demostración. En la demostración del Teorema 1.6, se vio que los elementos $\widetilde{e}_{\varepsilon i}, \widetilde{h}_i$ satisfacen las relaciones $R_1(q'), R_2(q')$ y $R_3(q')$. Por lo tanto, resta probar que satisfacen las relaciones $R_4(q')$, es decir, se tiene que demostrar que $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\widetilde{e}_{\delta j}) = 0$ donde $m' = max\{0, -\varepsilon\delta A'_{ij}\}$, $\varepsilon, \delta = \pm 1$ para cada $i, j = 1, \ldots, n$. Si $i = j$ el resultado es obvio. Por lo tanto se puede suponer que $i \neq j$ y distinguir varios casos.
Caso $\boldsymbol{i \neq r}$**,** $\boldsymbol{j \neq r}$: En este caso se tiene que $\widetilde{e}_{\varepsilon i} = e_{\varepsilon i}$, $\widetilde{e}_{\delta j} = e_{\delta j}$ y $A'_{ij} = A_{ij}, m' = max\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\}$ y por lo tanto $(ad\widetilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\widetilde{e}_{\delta j}) = (ade_{\varepsilon i})^{1+m'}(e_{\delta j}) = 0$ por $R_4(q)$.
Caso $\boldsymbol{i = r, j \neq r, s}$: Bajo estas suposiciones se obtiene que $A'_{rj} = A_{rj} + A_{sj}$. Si $m' = 0$, entonces tiene que $A'_{rj} = 0$ ó $\varepsilon\delta A'_{rj} > 0$. En el primer caso, se

tiene que $A_{rj} = -A_{sj}$. Ahora si ambos son cero, se concluye que $[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] = 0$, $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] = 0$; de donde se sigue que $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon r})(\widetilde{e}_{\delta j}) = 0$ por $R_4(q)$. Por otro lado, si $[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] \neq 0$ y $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] \neq 0$, entonces se tiene que (r, s, j) es un ciclo en q y entonces $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon r})^{1+m'}(\widetilde{e}_{\delta j}) = [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}] = 0$ por $R_5(q)$. Ahora, si $\varepsilon\delta A'_{rj} > 0$, entonces como $A'_{sj} = A_{rj} + A_{sj}$ se tienen los siguientes casos:

(i) $A_{rj} = 0$ y $A_{sj} \neq 0$

(ii) $A_{rj} \neq 0$ y $A_{sj} = 0$.

Si $A'_{rj} = -1$ entonces $\varepsilon = -\delta$. Si se cumple (i) entonces $A_{sj} = -1$, así se tiene que $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_r)(\widetilde{e}_j) = [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon j}]$, pero por $R_4(q)$ se sabe que $[e_{\varepsilon r}, e_{-\varepsilon j}] = 0$ y $[e_{\varepsilon s}, e_{-\varepsilon j}] = 0$, de donde se sigue que $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_r)(\widetilde{e}_j) = 0$. Los casos restantes, se demuestran de forma similar.
Si $m' > 0$ entonces $m' = 1$ y $A'_{rj} = A_{rj} + A_{sj} = -\varepsilon\delta$. De lo cual se sigue que $A_{sj} = 0$ ó $A_{rj} = 0$. En el primer caso se tiene que:

(a) $[e_{\varepsilon s}, e_{\delta j}] = 0$,

(b) $[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}] = 0$,

(c) $[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}, e_{\delta r}] = 0$.

De (c) y (a) se obtiene que

(d) $[e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] = 0$.

Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $x, y, z \in \mathfrak{g}$ con $[x, y] = 0$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(e) $[x, y, z] = [y, x, z]$, $[x, z, y] = [y, z, x]$

(f) $[[x, z], y] = [[y, z], x]$, $[[z, x], y] = [[z, y], x]$

Usando las propiedades (a)-(d) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon r})^2(\widetilde{e}_{\delta j}) &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] \\
&= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}], e_{\varepsilon s}]] \quad (\text{por } (a)) \\
&= [e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta m}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]]] \quad (\text{por } (c)) \\
&= [e_{\varepsilon s}, [e_{\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\delta j}], e_{\varepsilon s}]]] \quad (\text{por } (b)) \\
&= [e_{\varepsilon s}, [[e_{\varepsilon r}, [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]]]] \quad (\text{por } (a)) \\
&= [[[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}]] \quad (\text{por } (d)) \\
&= -[[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}]] \ (\text{por antisimetría}) \\
&= -(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon r})^2(\widetilde{e}_{\delta j}).
\end{aligned}$$

De aquí que $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon r})^2(\widetilde{e}_{\delta j}) = 0$. En el segundo caso, en el que $A_{rj} = 0$, nótese que $[[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\delta j}] = [[e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], [e_{\varepsilon s}, e_{\varepsilon r}], e_{\delta j}]$ y se procede de manera similar intercambiando los roles de r y s.
Caso $i = r, j = s$**:** Obsérvese que $A'_{rs} = -A_{rs} = 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon r})^2 &= [\widetilde{e}_{\varepsilon r}, [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{-\varepsilon s}] \\
&= [\widetilde{e}_{\varepsilon r}, [e_{-\varepsilon s}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon r}] && \text{(por } (f)) \\
&= [\widetilde{e}_{\varepsilon r}, (-\varepsilon) h_s, e_{\varepsilon r}] && \text{(por } R_3(q)) \\
&= [\widetilde{e}_{\varepsilon r}, \varepsilon^2 A_{rs} e_{\varepsilon r}] && \text{(por } R_2(q)) \\
&= A_{rs}[[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon s}] && \text{(por bilinealidad)} \\
&= 0 && \text{(por } R_4(q)).
\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon r})(\widetilde{e}_{\varepsilon s}) &= [[e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], e_{\varepsilon s}] \\
&= 0 && \text{(por } R_4(q)).
\end{aligned}$$

Caso $i \neq r, j = r$: Si $A_{ir} = 0 = A_{is}$, es fácil verificar que $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon i})(\widetilde{e}_{\delta r}) = 0$. Por otro lado $A_{ir} \neq A_{is}$ (puesto que $|A'_{ir}| = |A_{ir} + A_{is}| < 2$) y por lo tanto se tiene que $[e_{\varepsilon i}, e_{\delta r}] = 0$ ó $[e_{\varepsilon i}, e_{\delta s}] = 0$ por $R_4(q)$. En el primer caso donde $[e_{\varepsilon i}, e_{\delta r}] = 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\widetilde{e}_{\delta r}) &= (\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}([e_{\delta r}, e_{\delta s}]) \\
&= (\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon i})^{m'}([e_{\delta r}, e_{\varepsilon i} e_{\delta s}]) \\
&\ \ \vdots \\
&= [e_{\delta r}, (\mathbf{ad}\ e_{\varepsilon i})^{1+m'}(e_{\delta s})]
\end{aligned}$$

el cual es cero si $m' \geq max\{0, -\varepsilon\delta A_{is}\}$, en particular si $A_{is} = 0$ ó $\varepsilon\delta A_{is} > 0$. Así sólo resta considerar el caso donde $\varepsilon\delta A_{is} = -1$ y $m' = 0$, es decir, $\varepsilon\delta A'_{ir} \geq 0$. Dado que $0 \leq \varepsilon\delta A'_{ir} = \varepsilon\delta A_{ir} + \varepsilon\delta A_{is} = \varepsilon\delta A_{ir} - 1$ se tiene que $\varepsilon\delta A_{ir} = 1$; pero entonces (r, i, s) es un ciclo en q y por lo tanto $(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon i})^{1+m'}(\widetilde{e}_{\delta r}) = [e_{\delta r}, e_{\varepsilon i}, e_{\delta s}]$ es cero por $R_5(q)$.
Caso $i = s, j = r$: Se tiene que

$$(\mathbf{ad}\ \widetilde{e}_{\varepsilon s})^{1+m'}(\widetilde{e}_{\delta r}) = -(\mathbf{ad}\ e_{\varepsilon s})^{2+m'}(e_{\delta r}) = 0$$

por $R_4(q)$ puesto que $1 + m' \geq 1 \geq max\{0, -\varepsilon\delta A_{sr}\} = max\{0, \varepsilon\delta\}$. ■

Lema 3.2 *Con la notación anterior, para cada ciclo* $\gamma = (r, i_1, i_2, \ldots, i_t)$ *en* q' *con* $q'_{ri_1} = -1, q'_{i_1 i_2} = -1, \ldots, q'_{i_{t-1} i_t} = -1$ *y* $q'_{i_t r} = 1$, *los siguientes monomios son cero en* $\mathfrak{g}_5(q)$:

$$\begin{array}{rcl} E^{+}_{\gamma,0} & := & [\widetilde{e}_r, \widetilde{e}_{i_1}, \widetilde{e}_{i_2}, \ldots, \widetilde{e}_{i_t}] \\ E^{+}_{\gamma,u} & := & [\widetilde{e}_{-i_u}, \widetilde{e}_{-i_{u+1}}, \ldots, \widetilde{e}_{-i_t}, \widetilde{e}_r, \widetilde{e}_{i_1}, \ldots, \widetilde{e}_{i_{u-1}}] \\ E^{-}_{\gamma,0} & := & [\widetilde{e}_{-r}, \widetilde{e}_{i_t}, \widetilde{e}_{i_{t-1}}, \ldots, \widetilde{e}_{i_1}] \\ E^{-}_{\gamma,u} & := & [\widetilde{e}_{-i_u}, \widetilde{e}_{-i_{u-1}}, \ldots, \widetilde{e}_{-i_1}, \widetilde{e}_{-r}, \widetilde{e}_{i_t}, \ldots, \widetilde{e}_{i_{u+1}}] \end{array} \tag{3.2}$$

El Lema 3.2 se demuestra más adelante.

Demostración de la Proposición 2.7. Por el Corolario 2.6 se deduce del Lema 3.2 que para $\varepsilon = \pm 1$, se tiene que

$$\begin{array}{rcl} E^{+,\varepsilon}_{\gamma,0} & := & [\widetilde{e}_{\varepsilon r}, \widetilde{e}_{\varepsilon i_1}, \widetilde{e}_{\varepsilon i_2}, \ldots, \widetilde{e}_{\varepsilon i_t}] = 0, \\ E^{+,\varepsilon}_{\gamma,u} & := & [\widetilde{e}_{-\varepsilon i_u}, \widetilde{e}_{-\varepsilon i_{u+1}}, \ldots, \widetilde{e}_{-\varepsilon i_t}, \widetilde{e}_{\varepsilon r}, \widetilde{e}_{\varepsilon i_1}, \ldots, \widetilde{e}_{\varepsilon i_{u-1}}] = 0, \\ E^{-,\varepsilon}_{\gamma,0} & := & [\widetilde{e}_{-\varepsilon r}, \widetilde{e}_{\varepsilon i_t}, \widetilde{e}_{\varepsilon i_{t-1}}, \ldots, \widetilde{e}_{\varepsilon i_1}] = 0, \\ E^{-,\varepsilon}_{\gamma,u} & := & [\widetilde{e}_{-\varepsilon i_u}, \widetilde{e}_{-\varepsilon i_{u-1}}, \ldots, \widetilde{e}_{-\varepsilon i_1}, \widetilde{e}_{-\varepsilon r}, \widetilde{e}_{\varepsilon i_t}, \ldots, \widetilde{e}_{\varepsilon i_{u+1}}] = 0. \end{array}$$

Se sabe por Lema 3.1 que los elementos $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\widetilde{h}_{\varepsilon i}$ satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_4(q')$. Ahora se mostrará que los elementos $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\widetilde{h}_{\varepsilon i}$ satisfacen también la relación $R_5(q')$. Por lo tanto, se tiene que demostrar que para cada ciclo $\gamma = (j_0, \ldots, j_{t-1})$ en q' el elemento

$$F^{\varepsilon_t}_{\gamma} = [\widetilde{e}_{\varepsilon_0 j_0}, \widetilde{e}_{\varepsilon_1 j_1}, \ldots, \widetilde{e}_{\varepsilon_{t-1} j_{t-1}}] \in \mathfrak{g}_5(q)$$

es cero, donde $\varepsilon_{t-1} = \pm 1$ y $\varepsilon_l = -q'_{j_l j_{l+1}} \varepsilon_{l+1}$ para $l = t-2, t-3, \ldots, 1$.
Si r no está en γ entonces $\widetilde{e}_{\varepsilon_a j_a} = e_{\varepsilon_a j_a}$ para $1 \leq a \leq t-1$ y γ es también un ciclo en q. Consecuentemente $F^{\varepsilon_t}_{\gamma} = 0$ por $R_5(q)$.
Así, resta considerar el caso donde r está en γ, sea $j_a = r$. Si $r \neq j_0$ y s no es un elemento de γ, se denota con $\overline{a-l}$ al residuo de $a-l$ módulo t, $1 \leq l \leq t$. Se puede asumir (usando el Lema 2.5) que $q'_{rj_{\overline{a-1}}} = -1, q'_{j_{\overline{a-1}} j_{\overline{a-2}}} = -1, \ldots, q'_{j_{\overline{a-(t-1)}} j_{\overline{a-t}}} = -1$, y entonces $q'_{j_{\overline{a-t}} r} = 1$ puesto que q' satisface la condición de ciclo. De esta forma, se definen $i_0 := r, i_1 := j_{\overline{a-1}}, \ldots, i_{t-1} = j_{\overline{a-t}}$ y se toma $\gamma' = (r, i_1, \ldots, i_{t-1})$. Aplicando el Lema 3.2 se concluye que $F^{\varepsilon_t}_{\gamma} = E^{+,\varepsilon_t}_{\gamma', a-1} = 0$.
Si $r = j_0$ y s no es un elemento de γ, nuevamente por el Lema 2.5, se puede

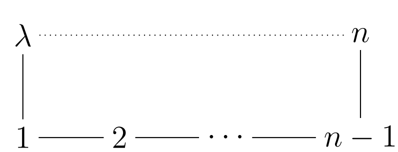
suponer que $q'_{rj_1} = -1, q'_{j_1j_2} = -1, \ldots, q'_{j_{t-2}j_t-1} = -1$ y entonces se tiene que $q'_{j_{t-1}r} = 1$, puesto que q' satisface la condición de ciclo. Así por el Lema 3.2 se tiene que $F^{\varepsilon_t}_{\gamma} = E^{+,\varepsilon_t}_{\gamma,0} = 0$.
Ahora si $r = j_a$, $a \neq 0$ y $s = j_{a-1}$, se puede suponer que

$$q'_{rj_{\overline{a+1}}} = -1, \ldots, q'_{j_{t-2}j_{t-1}} = -1$$

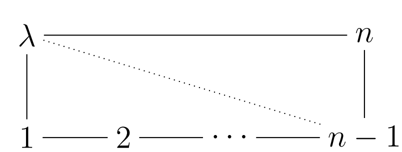
y como q' satisface la condición de ciclo, se tiene que $q'_{rj_{\overline{a-1}}} = 1$. Tomando el ciclo $\gamma' = (r, j_{\overline{a+1}}, \ldots, j_{\overline{a+t}} = j_{a-1})$ y aplicando nuevamente el Lema 3.2 se concluye que $F^{\varepsilon_t}_{\gamma} = E^{+,\varepsilon_t}_{\gamma',t-a} = 0$. Esto muestra que los elementos $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\widetilde{h}_i$ satisfacen la relación $R_5(q')$. Por lo tanto, se tiene que $\widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\widetilde{h}_i$ satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_5(q')$. Luego existe un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{g}_5(q') \to \mathfrak{g}_5(q)$ tal que $\varphi(e'_{\varepsilon i}) = \widetilde{e}_{\varepsilon i}$ y $\varphi(h'_i) = \widetilde{h}_i$. De forma similar existe un homomorfismo $\psi : \mathfrak{g}_5(q) \to \mathfrak{g}_5(q')$ y es fácil verificar que uno es inverso del otro, ver [BKL] para detalles. ■

3.1. Reducción a monomios especiales

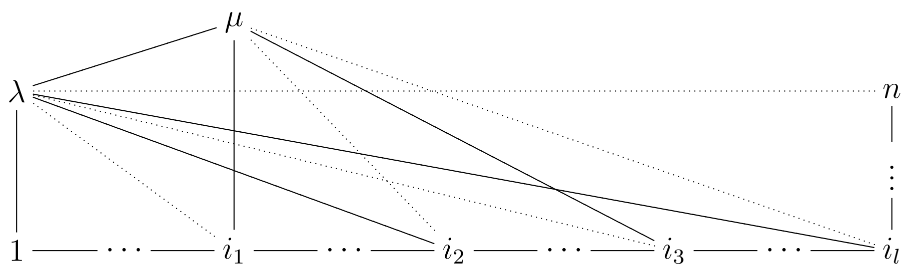
En esta sección se describen los ciclos γ en $q' = q \circ T_{sr}$ los cuales no necesariamente son ciclos en q. Recordar que cada forma unitaria $q : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}$ tiene asociada una bigráfica $B(q)$ con vértices $1, \ldots, N$ y aristas definidas como sigue: Dos vértices distintos i y j se unen por $|q_{ij}|$ aristas llenas si $q_{ij} < 0$ y por q_{ij} aristas punteadas si $q_{ij} > 0$. Claramente los ciclos en q corresponden a ciclos en $B(q)$.
Se introducen cuatro tipos de bigráficas. La primera es justamente un ciclo $\mathbf{c}^0_n(\lambda) = (\lambda, 1, \ldots, n)$ donde la arista $\{\lambda, n\}$ es la única arista punteada:



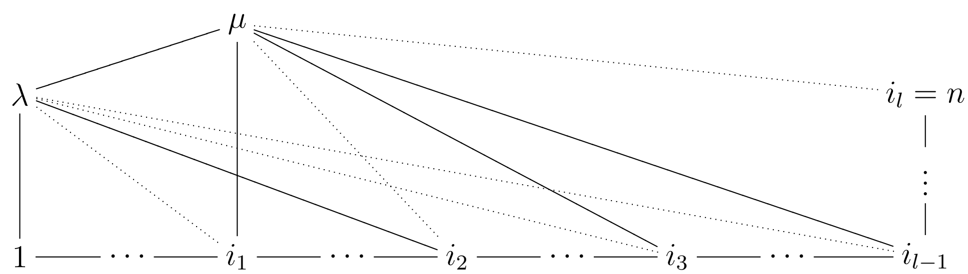
$\mathbf{c}^0_n(\lambda)$



$\mathbf{g}^0_n(\lambda)$



$\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l)$, $\quad l$ es par,



$\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l)$, $\quad l > 0$ es par.

Por definición, las aristas de $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$ son precisamente las que se encuentran en los dos ciclos $(\lambda, 1, 2, \ldots, n-1)$ y $(\lambda, n-1, n)$, donde $\{\lambda, n-1\}$ es la única arista punteada.
Ahora $\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu, i_1, \ldots, i_l)$ se obtiene del ciclo $\mathbf{c}_n^0(\lambda)$ añadiendo un nuevo vértice μ y trazando para cada $a = 1, 3, \ldots, l-1$ una arista punteada $\{\lambda, i_a\}$ y una llena $\{\mu, i_a\}$. Para cada $a = 2, 4, \ldots, l$ también se traza una arista llena $\{\lambda, i_a\}$ y una punteada $\{\mu, i_a\}$. La definición de $\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu, i_1, \ldots, i_l)$ es muy similar. Se inicia con un ciclo $(\mu, \lambda, 1, \ldots, n)$ donde $\{n, \mu\}$ es la única arista punteada y se trazan aristas como sigue: para cada $a = 1, 3, \ldots, l-1$ una arista punteada $\{\lambda, i_a\}$ y una arista llena $\{\mu, i-a\}$ y para cada $a = 2, 4, \ldots, l-2$ una arista llena $\{\lambda, i_a\}$ y una arista punteada $\{\mu, i_a\}$.
Recordar que sólo resta demostrar el Lema 3.2 y que por lo tanto la atención se puede restringir al caso donde $\gamma \subseteq B(q')$ es un ciclo con $\gamma = \mathbf{c}_n^0(r)$.

Lema 3.3 *Supóngase que q es positiva definida, $q_{rs} = -1$ y $q' = q \circ T_{sr}$. Más aún, sea $\gamma = \mathbf{c}_n^0(r)$ un ciclo en $B(q')$ y Γ la sub-bigráfica de $B(q)$ inducida por los vértices $r, s, 1, \ldots, n$.*

Si $s \in \gamma$ entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^0(r)$ y $n = s$. Si $s \notin \gamma$ entonces lo siguiente se cumple:

(a) Si $i_1 \neq 1$ y $i_l \neq n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^1(r, s; i_1, \dots, i_l)$ para algún par $l > 0$,

(b) Si $i_1 \neq 1$ y $i_l = n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^2(r, s; i_1, \dots, i_l)$ para algún par l,

(c) Si $i_1 = 1$ y $i_l \neq n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^2(s, r; i_2, \dots, i_l, n)$ para algún par l,

(d) Si $i_1 = 1$ y $i_l = n$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^1(s, r; i_2, \dots, i_{l-1})$ para algún par l.

Demostración. Si s es un vértice de γ, entonces como $q'_{rs} = 1$, se tiene que $s = n$ y por lo tanto la sub-bigráfica Γ de $B(q)$ tiene la forma $\Gamma = \mathbf{g}_n^0(r)$.
Si s no está en γ, entonces sean $i_1, \dots, i_l$ (con $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_l \leq n$) los vértices tales que $q'_{si_a} \neq 0$.
Si $l = 0$, es decir $q'_{si_a} = 0$, entonces $\Gamma = \mathbf{g}_n^1(r, s;)$. Así, supóngase ahora que $l > 0$. Se denotará con Γ' a la sub-bigráfica inducida de $B(q')$ dada por los vértices $s, r, 1, \dots, n$.
Dado que $(s, r, 1, \dots, i_1)$ es un ciclo en $B(q')$ se tiene que $q'_{si_1} = -1$ por la condición de ciclo. De manera inductiva para $1 < a \leq l$ se tiene que $(s, i_{a-1}, i_{a-1}+1, \dots, i_a)$ es un ciclo en $B(q')$, de donde se deduce nuevamente por la condición de ciclo que $q'_{s,i_a} = (-1)^a$.
Si $i_l = n$ entonces (r, i_l, s) es un ciclo en $B(q')$ y como $q'_{sr} = 1 = q'_{r,i_l}$ se tiene que $(-1)^l = q'_{s,i_l} = 1$. Por lo tanto l es par.
Si $i_l \neq n$ entonces $(r, s, i_l, \dots, n)$ es un ciclo en $B(q')$. Nuevamente por la condición de ciclo, se tiene que $(-1)^l = q'_{s,i_l}$, lo cual implica que l es par.
El resto de las verificaciones son cálculos directos usando que $q_{ri} = q'_{ri} - q'_{si}$ para cada $i \neq r, s$. ■
El siguiente resultado ayudará a reducir algunos cálculos a la mitad.

Lema 3.4 *Si $A = [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}]$ es un monomio que satisface $[A_i, A_j] = 0$ cuando $|i - j| \neq 1$, entonces se tiene que*

$$A^{\leftarrow} := [A_{n+1}, A_n, \dots, A_2, A_1] = (-1)^n [A_1, A_2, \dots, A_{n+1}].$$

Demostración. La demostración es sencilla utilizando inducción y los incisos $(e), (f)$ en la demostración del Lema 3.1. ■

Ahora se formulará un resultado que involucra conocimientos acerca de la bigráfica $B(q)$ y los monomios en $\mathfrak{g}_5(q)$. Este resultado implicará el Lema 3.2, como se verá más adelante.

Lema 3.5 *Sea q positiva definida. Supóngase que la sub-bigráfica inducida Γ de $B(q)$ es de la forma $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$, $\mathbf{g}_n^1(\lambda,\mu,i_1,\dots,i_l)$ (para algún l par) ó $\mathbf{g}_n^2(\lambda,\mu,i_1,\dots,i_l)$ (para algún $l>0$ par).*
Entonces los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$ (donde en el caso $\Gamma = \mathbf{g}_n^0(\lambda)$ se supone que $\mu = n$):

$$\begin{aligned} F_{n,0}(\lambda,\mu) &:= [[e_\lambda,e_\mu],e_{-n},e_{-(n-1)},\dots,e_{-1}], \\ F_{n,u}(\lambda,\mu) &:= [e_u,e_{u-1},\dots,e_1,[e_\lambda,e_\mu],e_{-n},\dots,e_{-(u+1)}], \quad \textit{para } u=1,\dots,n. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Demostración del Lema 3.2. Se definen los siguientes monomios en $\mathfrak{g}_5(q)$:

$$\begin{aligned} G^+_{n,0}(\lambda,\mu) &:= [[e_\lambda,e_\mu],e_1,\dots,e_n], \\ G^+_{n,u}(\lambda,\mu) &:= [e_{-u},e_{-(u+1)},\dots,e_{-n},[e_\lambda,e_\mu],e_1,\dots,e_{u-1}], \\ G^-_{n,0}(\lambda,\mu) &:= [[e_{-\lambda},e_{-\mu}],e_n,e_{n-1},\dots,e_1], \\ G^-_{n,u}(\lambda,\mu) &:= [e_{-u},e_{-(u-1)},\dots,e_{-1},[e_{-\lambda},e_{-\mu}],e_n,\dots,e_{u+1}], \end{aligned} \tag{3.4}$$

Entonces $G^-_{n,v}(\lambda,\mu) = F_{n,v}(\lambda,\mu) = 0$ para $1 \le v \le n$ y $G^-_{n,0}(\lambda,\mu) = \Phi(F_{n,0}(\lambda,\mu)) = 0$, donde Φ es el automorfismo del Corolario 2.6. Obsérvese que $G^+_{n,v}(\lambda,\mu)$ es un monomio que satisface las hipótesis del Lema 3.4. De aquí, que para $1 \le u \le n$, se tiene que $G^+_{n,u}(\lambda,\mu) = \pm\Phi(G^-_{n,u-1}(\lambda,\mu)^{\leftarrow}) = 0$ y $G^+_{n,0}(\lambda,\mu) = \pm\Phi(G^-_{n,n}(\lambda,\mu)^{\leftarrow}) = 0$.
Por definición, se tiene que $G^\varepsilon_{n,v}(\mu,\lambda) = -G^\varepsilon_{n,v}(\lambda,\mu)$ para $\varepsilon = \pm 1$ y $v = 0,1\dots,n$. Supóngase ahora, que $\gamma = \mathbf{c}_n^0(r)$ es un ciclo en $B(q')$. Si $s \in \gamma$, se tiene que $\Gamma = \mathbf{g}_n^0(r)$ y los monomios de la ecuación (3.2) se convierten directamente en monomios de la ecuación (3.4) por medio de $E^\varepsilon_{\gamma,v} = G^\varepsilon_{n,v}(r,n)$.
Si $s \notin \gamma$ entonces primero se consideran los casos (a) y (b) del Lema 3.3; aplicando el Lema 3.5 se tiene que $E^\varepsilon_{\gamma,v} = G^\varepsilon_{n,v}(r,s) = 0$. En los casos (c) y (d) del Lema 3.3, se tiene que $E^\varepsilon_{\gamma,v} = G^\varepsilon_{n,v}(s,r) = -G^\varepsilon_{n,v}(r,s) = 0$. Lo cual completa la demostración. ■