Capítulo 4

Monomios, cadenas llenas y bigráficas

En este capítulo se definirá un producto entre monomios y se demostrarán algunos de los detalles técnicos necesarios para la demostración del Teorema 1.10.

4.1. Monomios en el magma libre

Dado un conjunto X, se define una sucesión de conjuntos $\mathcal{M}_n(X)$ de la siguiente forma.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(X) &= X \\ \mathcal{M}_n(X) &= \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i(X) \times \mathcal{M}_{(n-i)}(X) \quad \text{para } n \geq 2.\end{aligned}$$

Se define $\mathcal{M}(X) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n(X)$ (ver [BN]).
Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene la inclusión $i_n : \mathcal{M}_n(X) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$, $\mathcal{M}_n$ se identifica con su imagen en $\mathcal{M}(X)$ bajo i_n. Si $m \neq n$ entonces $\mathcal{M}_n(X) \cap \mathcal{M}_m(X) = \emptyset$. Así, para cada $A \in \mathcal{M}(X)$ existe un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \in \mathcal{M}_n(X)$. El número n es llamado la *longitud* de A y es denotado por $l(A)$. El conjunto X consiste de todos los elementos en $\mathcal{M}(X)$ de longitud uno.
Sean $A, A' \in \mathcal{M}(X)$ tales que $p = l(A)$ y $q = l(A')$. La imagen de (A, A') bajo la inyección canónica del conjunto $\mathcal{M}_p(X) \times \mathcal{M}_q(X)$ en el conjunto $\mathcal{M}_{p+q}$ es llamada la composición de A y A'. Así, se tiene que $l(A, A') = l(A) + l(A')$

y cada elemento de $\mathcal{M}(X)$ de longitud ≥ 2 se escribe de manera única en la forma (A, A') con $A, A' \in \mathcal{M}(X)$.
Se define $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{M}(X)$ de forma inductiva por

$$(A_1, \ldots, A_n) := (A_1, (A_2, \ldots, A_n)).$$

Si $A = (A_1, \ldots, A_n)$ se define $\overleftarrow{A} = (A_n, \ldots, A_1)$. Por otra parte, si $r_i = l(A_i)$ $(r_i \geq 1)$ entonces $l(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} r_i$. Sea $A = (a_1, \ldots, a_n)$ con $a_i \in X$ se dice que b es una *entrada* de A si $b = a_i$ para algún i. Lo cual se denotará con $b \in_{\mathrm{entr}} A$.
En este trabajo, X siempre denotará el conjunto

$$X = \{e_i, e_{-i}, hi \quad | \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Se define una nueva operación binaria en $\mathcal{M}(X)$ de la siguiente manera

$$f : \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$$

está dada por

$$f(A, B) = A \bullet B = \begin{cases} (A, B), & \text{si } A \in X\ ; \\ (A_1, A_2 \bullet B), & \text{si } A = (A_1, A_2). \end{cases}$$

Sea $\pi : \mathcal{M}(X) \to \mathfrak{g}_5(q)$ la proyección dada por $\pi(A) = A$ si $A \in X$ y $\pi((A_1, A_2)) = [\pi(A_1), \pi(A_2)],$.

Proposición 4.1 *Si* $A, B, C \in \mathcal{M}(X)$ *entonces*

$$A \bullet (B \bullet C) = (A \bullet B) \bullet C.$$

Demostración. La demostración es por inducción sobre $l(A)$. Si $l(A) = 1$ entonces $A \in X$ y se tiene que

$$(A \bullet B) \bullet C) = (A, B) \bullet C = (A, B \bullet C) = A \bullet (B \bullet C).$$

Supóngase que el resultado es cierto para toda $m < l(A)$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} A \bullet (B \bullet C) &= (A_1, A_2 \bullet (B \bullet C)) && \text{(definición)} \\ &= (A_1, (A_2 \bullet B) \bullet C) && \text{(inducción)} \\ &= (A \bullet B) \bullet C && \text{(definición).} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Lema 4.2 *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.*

(a) *Si $[A, B] = 0$ entonces $[A, B, C] = [B, A, C]$.*

(b) *Si $[A, B] = 0$ entonces $[A, C, B] = [B, C, A]$.*

(c) *Si $[A_i, B] = 0$ para toda $1 \leq i \leq n$ entonces*

$$[A_n, \ldots, A_1, B, C] = [B, A_1, \ldots, A_n, C].$$

Demostración.

(a) Como $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie se tiene que

$$\begin{aligned} [A, B, C] &= -[C, A, B] - [B, C, A] && \text{(identidad de Jacobi)} \\ &= -[B, C, A] && ([A, B] = 0, \text{ por hipótesis}) \\ &= [B, A, C] && \text{(antisimetría)} \end{aligned}$$

El inciso (b) se obtiene del inciso (a) por antisimetría.

(c) Por inducción sobre n. El caso $n = 1$ se cumple por inciso (a). Supóngase que el resultado se cumple para $n - 1$. Así se tiene que

$$\begin{aligned} [A_n, A_{n-1} \ldots, A_1, B, C] &= [a_n, [a_{n-1}, \ldots, a_1, B, C]] && \text{(definición)} \\ &= [A_n, [B, A_{n-1}, \ldots, A_1, C]] && \text{(inducción)} \\ &= [A_n, B, [A_{n-1}, \ldots, A_1, C]] && \text{(definición)} \\ &= [B, A_n, \ldots, A_1, C]] && \text{(por } (a)) \end{aligned}$$

■

Lema 4.3 *Sea $A = (A_n, \ldots, A_1)$. Si $a \in X$ es tal que $[a, \pi(A_i)] = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces se tiene que $[a, \pi(A)] = 0$.*

Demostración. Por inducción sobre n. Si $n = 1$ el resultado es inmediato. Supóngase que $n > 1$ y que el resultado se cumple para toda $m < n$. Sea $B = (A_{(n-1)}, \ldots, A_1)$ entonces se tiene que $\pi(B) = [\pi(A_{(n-1)}), \ldots, \pi(A_1)]$; así se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi(A) &= [\pi(A_n), \pi(A_{(n-1)}), \ldots, \pi(A_1)] \\ &= [\pi(A_n), \pi(B)]. \end{aligned}$$

De lo anterior se concluye que

$$\begin{aligned}[a,\pi(A)] &= [a,\pi(A_n),\pi(B)] \\ &= [\pi(A_n),a,\pi(B)] \qquad \text{(Lema 4.2 (a))}.\end{aligned}$$

Luego por hipótesis de inducción se tiene que $[a,\pi(B)]=0$; lo cual implica que $[a,\pi(A)]=0$. ■

Lema 4.4 *Sea* $A=(a_1,\ldots,a_{r_1})$, B, $C\in\mathcal{M}(X)$ *con* $a_i\in X$.

(a) *Si* $[a,\pi(B)]=0$ *para toda* $a\in_{entr} A$, *entonces*

$$\pi(A\bullet(B,C))=[\pi(B),\pi(A\bullet C)].$$

(b) *Si* $[a,\pi(B)]=0$ *para toda* $a\in_{entr} A$, *entonces*

$$\pi(A\bullet(C,B))=[\pi(A\bullet C),\pi(B)].$$

(c) *Si* $A_i=(a_{i,1},\ldots,a_{i,r_i})\in\mathcal{M}(X)$ *con* $a_{i,j}\in X$ *y* $1\le i\le n$ *son tales que* $[a,\pi(B)]=0$ *para toda* $a\in_{entr} A_i$, *entonces*

$$\pi(A_n\bullet\cdots\bullet A_1\bullet(B,C))=[\pi(B),\pi(A_n\bullet\cdots\bullet A_1\bullet C)].$$

(d) *Si* $A_i=(a_{i,1},\ldots,a_{i,r_i})\in\mathcal{M}(X)$ *con* $a_{i,j}\in X$ *y* $1\le i\le n$ *son tales que* $[a,\pi(B)]=0$ *para toda* $a\in_{entr} A_i$, *entonces*

$$\pi(A_n\bullet\cdots\bullet A_1\bullet(C,B))=[\pi(A_n\bullet\cdots\bullet A_1\bullet C),\pi(B)].$$

Demostración.

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned}\pi(A\bullet(B,C)) &= [a_1,\ldots,a_{r_1},\pi(B),\pi(C)] \quad \text{(definición)} \\ &= [\pi(B),a_1,\ldots,a_{r_1},\pi(C)] \quad \text{(lema anterior)} \\ &= [\pi(B),\pi(A\bullet C)] \quad \text{(definición)}\end{aligned}$$

El inciso (b) se obtiene del inciso (a) por antisimetría.

El inciso (c) se sigue del inciso (a). Finalmente, el inciso (d) se obtiene de (c) por antisimetría. ■

Lema 4.5 *Si* $A = (a_m, \ldots, a_1)$ *es tal que* $\pi(A \bullet B) = 0$ *y* $[a, \pi(C)] = 0$ *para toda* $a \in_{entr} A$*, entonces se tiene que* $\pi(A \bullet (B, C)) = 0$*.*

Demostración. Por Lema 4.4 se tiene que $\pi(A \bullet (B, C)) = [\pi(A \bullet B), \pi(C)]$ y por hipótesis se sabe que $\pi(A \bullet B) = 0$. De donde se sigue que $\pi(A \bullet (B, C)) = 0$. ■

Lema 4.6 *Sean* $A_i = (a_{n_i,i}, \ldots, a_{2,i}, a_{1,i}) \in \mathcal{M}(X)$ *con* $a_{j,i} \in X$*.*

(a) *Si* $[a, \pi(A_1)] = 0$ *para* $a \in_{entr} A_2$ *con* $a \neq a_{1,2}$*, entonces*

$$\pi(A_2 \bullet A_1) = [\pi(A_2), \pi(A_1)]$$

(b) *Si* $[a, \pi(A_{(i-1)} \bullet \cdots \bullet A_1)] = 0$ *para* $a \in_{entr} A_i$ *con* $a \neq a_{1,i}$*,* $2 \leq i \leq k$*, entonces* $\pi(A_k \bullet \cdots \bullet A_1) = [\pi(A_k), \ldots, \pi(A_1)]$*.*

Demostración.

(a) Por inducción sobre n_2. Para $n_2 = 2$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\pi(A_2 \bullet A_1) &= [a_{22}, a_{12}, \pi(A1)] && \text{(definición)}\\
&= [\pi(A_1), a_{1,2}, a_{2,2}] && \text{(Lema 4.2)}\\
&= [\pi(A_2), \pi(A_1)] && \text{(antisimetría y definición)}
\end{aligned}$$

Supóngase que el resultado se cumple para $n_2 = m$, es decir,

$$\pi(A_2' \bullet A_1) = [\pi(A_2'), \pi(A_1)]$$

donde $A_2' = (a_{m,2}, \ldots, a_{1,2})$. Sea

$$A = (a_{(m+1),2}, a_{m,2}, \ldots, a_{1,2})$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\pi(A \bullet A_1) &= [a_{(l+1),2}, \pi(A_2' \bullet A_1)] && \text{(definición)}\\
&= [a_{(l+1),2}, \pi(A_2'), \pi(A_1)] && \text{(inducción)}\\
&= -[a_{(l+1),2}, \pi(A_1), \pi(A_2')] && \text{(antisimetría)}\\
&= -[\pi(A_1), a_{(l+1),2}, \pi(A_2')] && \text{(Lema 4.2(a))}\\
&= [\pi(A), \pi(A_1)] && \text{(antisimetría)}
\end{aligned}$$

(b) Por inducción sobre k. El caso $k = 2$ se cumple por inciso (a). Supóngase que el resultado se cumple para k, es decir, que si $B = A_k \bullet \cdots \bullet A_1$ entonces se tiene que $\pi(B) = [\pi(A_k), \ldots, \pi(A_1)]$. Sea

$$A_{k+1} = (a_{n_{k+1},(k+1)}, \ldots, a_{1,(k+1)}).$$

Si $[a_{j,(k+1)}, \pi(B)] = 0$ para $j \neq 1$, entonces por inciso (a) se tiene

$$\pi(A_{k+1} \bullet B) = [\pi(A_{k+1}), \pi(B)]$$

■

Lema 4.7 *Sean $A = (a_n, \ldots, a_1)$, $B = (b_r, \ldots, b_1)$ con a_i, $b_j \in X$, tales que $[a, b] = 0$ para $a \in_{entr} A$, $b \in_{entr} B$ con $a \neq a_1$. Entonces se tiene que $\pi(A \bullet B) = [\pi(A), \pi(B)]$*

Demostración. Por hipótesis se tiene que $[a, b] = 0$ para $a \in_{\text{entr}} A$, $b \in_{\text{entr}} B$ con $a \neq a_1$. Luego por Lema 4.3 se tiene que $[a, \pi(B)] = 0$ para $a \neq a_1$. Así por Lema 4.6(a) concluimos que $\pi(A \bullet B) = [\pi(A), \pi(B)]$. ■

Lema 4.8 *Sean $A = (a_{n_1}, \ldots, a_1)$, $B = (b_{n_2}, \ldots, b_1) \in \mathcal{M}(X)$ con $a_i, b_j \in X$ tales que $[a, b] = 0$ para toda $a \in_{entr} A$ y toda $a \in_{entr} B$. Entonces $\pi(A \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet A \bullet C)$.*

Demostración. Primero se mostrará el caso especial donde $n_1 = 1$ y la demostración se hará por inducción sobre n_2. Si $n_2 = 1$:

$$\begin{aligned} \pi(a_1 \bullet b_1 \bullet C) &= \pi(a_1 \bullet (b_1, C)) && \text{(definición)} \\ &= [b_1, [a_1, \pi(C)]] && \text{(Lema 4.4(a))} \\ &= \pi(b_1 \bullet a_1 \bullet C) && \text{(definición)} \end{aligned}$$

Supóngase que $B = (b_{n_2-1}, \ldots, b_1)$ y que $\pi(a_1 \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet a_1 \bullet C)$. Sea $B' = (b_{n_2}, b_{n_2-1}, \ldots, b_1)$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \pi(a_1 \bullet B' \bullet C) &= \pi(a_1 \bullet (b_{n_2}, B \bullet C)) && \text{(definición)} \\ &= [b_{n_2}, [\pi(a \bullet (B \bullet C)] && \text{(Lema 4.4(a))} \\ &= [b_{n_2}, \pi(B \bullet a_1 \bullet C)] && \text{(inducción)} \\ &= \pi(b_{n_2} \bullet B \bullet a_1 \bullet C) && \text{(definición)} \\ &= \pi(B' \bullet a_1 \bullet C) && \text{(asociatividad)} \end{aligned}$$

Ahora se demostrará el caso general. Si $A = (a_{n_1}, \ldots, a_1)$, $B = (b_{n_2}, \ldots, b_1)$ y $[a, b] = 0$ para toda $a \in_{\text{entr}} A$,$b \in_{\text{entr}} B$, entonces $\pi(A \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet A \bullet C)$. La demostración es por inducción sobre n_1. Para $n_1 = 1$ se cumple por la primer parte de la demostración.
Supóngase que para $A = (a_{(n_1-1)}, \ldots, a_1)$ se tiene que $\pi(A \bullet B \bullet C) = \pi(B \bullet A \bullet C)$. Sea $A' = (a_{n_1}, a_{(n_1-1)}, \ldots, a_1)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\pi(A' \bullet B \bullet C) &= \pi(a_{n_1} \bullet A \bullet B \bullet C) && \text{(por definición)} \\
&= \pi(a_{n_1} \bullet B \bullet A \bullet C) && \text{(inducción)} \\
&= \pi(B \bullet a_{n_1} \bullet A \bullet C) && \text{(caso especial)} \\
&= \pi(B \bullet A' \bullet C) && \text{(definición y asociatividad)}
\end{aligned}$$

■

4.2. Cadenas llenas

Una tupla de vértices $(p_1, \ldots, p_n)$ de una bigráfica Γ es una *cadena* si existe una arista entre los vértices p_i y p_j si y sólo si $|i - j| = 1$. Se dice que la cadena es *llena* si todas sus aristas son llenas. Si $\Delta = (p_1, \ldots, p_n)$ es una cadena en Γ y a es un vértice que no este en Δ, entonces se dice que $i \in \Delta$ es un *enlace* del vértice a si $q_{ai} \neq 0$. Denotaremos por $L_a(\Delta)$ al conjunto de vértices en Δ que son enlaces del vértice a.

Lema 4.9 *Sea q una forma unitaria positiva definida y $\Delta = (1, \ldots, n)$ una cadena llena en $B(q)$. Entonces, para $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq n$ se tiene que*

$$\pi(D_l \bullet \cdots \bullet D_1) = [\pi(D_l), \ldots, \pi(D_1)],$$

donde $D_m = (e_{\varepsilon i_m}, \ldots, e_{\varepsilon(i_{m-1}+1)}) \in \mathcal{M}(X)$ para $1 \leq m \leq l$ y además $i_0 := 0$.

Demostración. Como $\Delta = (1, \ldots, n)$ una cadena llena, entonces $[e_{\varepsilon a}, e_{\delta b}] = 0$ si $a, b \in \{1, \ldots, n\}$ y $|a - b| > 1$, donde $\varepsilon, \delta = \pm 1$. Así se tiene que $[x, \pi(D_{m-1} \bullet \cdots \bullet D_1)] = 0$ para toda $x \in_{\text{entr}} D_m$ con $x \neq e_\varepsilon(i_{m-1} + 1)$, $2 \leq m \leq l$. Luego por Lema 4.6 (b) se obtiene el resultado. ■

Lema 4.10 *Sea $\Delta = (1, \ldots, n)$ una cadena llena. Si $L_a(\Delta) = \{1, n\}$ entonces se tiene que $[e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon n}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = 0$, donde $\varepsilon_1 = -\varepsilon q_{ap}$.*

Demostración. Sea $E = [e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon p}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = 0$. Entonces $E = 0$ por $(R5)$.
■

Lema 4.11 *Supóngase que la cadena llena $\Delta = (1, \ldots, n)$ tiene un número par de vértices. Sea $L_a(\Delta) = \{i_1, \ldots, i_k\}$ con k par. Si $i_1 = 1$, $i_k = p$, $i_{2m} + 1 = i_{(2m+1)}$ para $2 \leq m \leq \frac{k}{2} - 1$, entonces se tiene que*

$$[e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon r}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = 0,$$

donde $\varepsilon_1 = -\varepsilon q_{ap}$.

Demostración. Sea $E := [e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon p}, \ldots, e_{\varepsilon 1}]$. Se definen

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & (e_{\varepsilon i_2}, \ldots, e_{\varepsilon i_1}) \\ D_2 & = & (e_{\varepsilon i_4}, \ldots, e_{\varepsilon i_3}) \\ & \vdots & \\ D_{\frac{k}{2}} & = & (e_{\varepsilon i_k}, \ldots, e_{\varepsilon i_{(k-1)}}). \end{array}$$

Así, se tiene que $E = [e_{\varepsilon_1 a}, \pi(D_{\frac{k}{2}} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1)]$. Pero como $q_{nl} = 0$ si $|n - l| > 1$ entonces concluimos que

$$[e_{\varepsilon la}, \pi(D_{(m-1)} \bullet \cdots \bullet D_1)] = 0$$

para $i_{(2m-1)} < l \leq i_{2m}$, $1 \leq m \leq \frac{k}{2}$. Luego por Lema 4.6(b) se tiene que $\pi(D_{\frac{k}{2}} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1) = [\pi(D_{\frac{k}{2}}), \ldots, \pi(D_2), \pi(D_1)]$. Así obtenemos que $E = [e_{\varepsilon_1 a}, \pi(D_{\frac{k}{2}}), \ldots, \pi(D_2), \pi(D_1)]$; pero por Lema 4.10 se tiene que $[e_{\varepsilon_1 a}, \pi(D_i)] = 0$ para $i = 1, \ldots, \frac{k}{2}$. Entonces por Lema 4.3 concluimos finalmente que $E = 0$.
■

Lema 4.12 *Sea q una forma unitaria positiva definida, $\Delta = (1, \ldots, u)$ una cadena llena en $B(q)$ y sea a un vértice que no está en Δ. Entonces existe un número par de vértices de Δ que son enlaces de a si y sólo si $\sum_{j=1}^{u} q_{a,j} = 0$. En este caso se tiene que*

(a) $[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon u}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = 0$ *y*

(b) $[e_{\varepsilon 1}, \ldots, e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}] = 0$,

para $\sigma, \varepsilon = \pm 1$.

Demostración. Dado que q es una forma unitaria positiva definida, se tiene que $-1 \leq q_{ij} \leq 1$. Sea $L_a(\Delta) = \{i_1, \ldots, i_k\}$ con $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq u$. Como q satisface la condición ciclo, se tiene que $q_{ai_s} = -q_{ai_{s+1}}$ para $1 \leq s < k$. Por lo tanto, obtenemos que l es par si y sólo si $\sum_{j=1}^{u} q_{a,j} = 0$.

Ahora supóngase que l es par. Si $L_a(\Delta) = \emptyset$, entonces se tiene que $[e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon m}] = 0$. Así por el Lema 4.3 el resultado se verifica de inmediato. Así podemos suponer que $L_a(\Delta) \neq \emptyset$. Como q es positiva, los vértices i_m, i_{m+1} son tales que $q_{ai_m} = -q_{ai_{m+1}}$ para $i_1 \leq m < i_k$.

Supóngase primero que $i_{2m} + 1 = i_{2m+1}$. Si $i_1 \neq 1$ y $i_k \neq n$ se definen

$$\begin{array}{rcl} D_1 & = & (e_{\varepsilon(i_1-1)}, \ldots, e_{\varepsilon 1}) \\ D_2 & = & (e_{\varepsilon i_k}, \ldots, e_{\varepsilon i_1}) \\ D_3 & = & (e_{\varepsilon n}, \ldots, e_{\varepsilon(i_k+1)}). \end{array}$$

Así se tiene que

$$[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = [e_{\sigma a}, \pi(D_3 \bullet D_2 \bullet D_1)].$$

Por Proposición 4.9(a) se tiene que $\pi(D_3 \bullet D_2 \bullet D_1) = [\pi(D_3), \pi(D_2 \bullet D_1)]$. Ahora por Proposición 4.9(b) se tiene que $\pi(D_2 \bullet D_1) = [\pi(D_2), \pi(D_1)]$ y entonces se sigue que

$$[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = [e_{\sigma a}, \pi(D_3), \pi(D_2), \pi(D_1)].$$

Finalmente, como $[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon i}] = 0$ para $i \in \{1, \ldots, i_1 - 1, i_k + 1, \ldots, r\}$ se obtiene por Lema 4.3 que $[e_{\sigma a}, \pi(D_j)] = 0$ para $j = 1, 3$. Más aún, por Lema 4.11 se tiene que $[e_{\sigma a}, \pi(D_2)] = 0$ y así por Lema 4.3 tenemos que $[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = 0$. Si $i_1 = 1$ y $r \neq i_k$, se consideran D_2 y D_3. Si $i_1 \neq 1$ y $r = i_k$, se consideran D_1 y D_2. Si $i_1 = 1$ y $r = i_k$ sólo se considera D_2 y se da en todos estos casos un argumento similar al anterior.

Supóngase ahora que para algún $1 \leq m < \frac{k}{2}$ se tiene que $i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}$.

Sean

$$\begin{aligned}
m_1 &:= min\{m \mid 1 \leq m < \frac{k}{2}, i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}\} \\
m_2 &:= min\{m \mid m_1 < m < \frac{k}{2}, i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}\} \\
&\vdots \\
m_t &:= min\{m \mid m_{(t-1)} < m < \frac{k}{2}, i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}\}
\end{aligned}$$

todos los m tales que $i_{2m} + 1 \neq i_{(2m+1)}$. Si $i_1 \neq 1$ y $r \neq i_k$, se definen

$$\begin{aligned}
D_1 &= (e_{\varepsilon(i_1-1)}, \ldots, e_{\varepsilon 1}) \\
D_2 &= (e_{\varepsilon i_{2m_1}}, \ldots, e_{\varepsilon i_1}) \\
D_3 &= (e_{\varepsilon(i_{(2m_1+1)}-1)}, \ldots, e_{\varepsilon(i_{2m_1}+1)}) \\
&\vdots \\
D_{2t} &= (e_{\varepsilon i_{2m_t}}, \ldots, e_{\varepsilon i_{(2m_(t-1)+1)}}) \\
D_{(2t+1)} &= (e_{\varepsilon(i_{(2m_t+1)}-1)}, \ldots, e_{\varepsilon(i_{2m_t}+1)}) \\
D_{2(t+1)} &= (e_{\varepsilon i_k}, \ldots, e_{\varepsilon i_{(2m_t+1)}}) \\
D_{(2(t+1)+1)} &= (e_{\varepsilon r}, \ldots, e_{\varepsilon(i_k+1)}).
\end{aligned}$$

Así se tiene que

$$[e_{\sigma a}, e_{\varepsilon r}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = [e_{\varepsilon_1 a}, \pi(D_{(2(t+1)+1)} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1)].$$

Usando iteradamente los incisos (a) y (b) de la Proposición 4.9 obtenemos que

$$\pi(D_{(2(t+1)+1)} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1) = [\pi(D_{(2(t+1)+1)}), \ldots, \pi(D_2), \pi(D_1)].$$

Por Lema 4.3 se tiene que $[e_{\sigma a}, \pi(D_j)] = 0$ para j impar. Más aún, por Lema 4.11 se tiene que $[e_{\sigma a}, \pi(D_j)] = 0$ si j es par; así por Lema 4.3 se concluye que $[e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon r}, \ldots, e_{\varepsilon 1}] = 0$. Si $i_1 = 1$ y $r \neq i_k$, se consideran $D_2, \ldots, D_{(2(t+1)+1)}$, si $i_1 \neq 1$ y $r = i_k$ se consideran $D_1, \ldots, D_{2(t+1)}$, si $i_1 = 1$ y $r = i_k$ se consideran $D_2, \ldots, D_{2(t+1)}$ y se da en todos estos casos un argumento similar al anterior. Lo cual demuestra el inciso (a).
Si $[e_{\varepsilon u}, e_{\sigma 0 a}] = 0$, se obtiene (b) de forma trivial. Así supóngase que $[e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}] \neq$

0 y sea $j < u$ el maximal tal que $q_{ja} \neq 0$. Entonces se tiene que $\sum_{i=j}^{u} q_{ia} = 0$ y $[e_{\varepsilon i}, e_{\sigma a}] = 0$ para $j < i < u$. Así $[e_{\varepsilon(j+1)}, \ldots, e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}]$ satisface las condiciones del Lema 3.4 y por lo tanto

$$[e_{\varepsilon j}, \ldots, e_{\varepsilon u}, e_{\sigma a}] = \pm[e_{\varepsilon_1 a}, e_{\varepsilon u}, \ldots, e_{\sigma a}],$$

el cual es cero por (a). ■

4.3. Monomios cero asociados a cadenas llenas con enlaces

Lema 4.13 *Sea q una forma unitaria positiva definida, sea $\Delta = (1, \ldots, u)$ una cadena llena en $B(q)$ y sea a un vértice que no está en Δ. Supóngase que $\sum_{j=1}^{u} q_{aj} = 0$ y que $B \in \mathcal{M}(X)$ es tal que $[e_{\varepsilon j}, \pi(B)] = 0$ para $1 \leq j \leq u$. Entonces se tiene que $\pi(D \bullet (e_{\sigma a}, B)) = 0$ donde $D = (e_{\varepsilon u}, \ldots, e_{\varepsilon 1}) \in \mathcal{M}(X)$ y $\sigma, \varepsilon = \pm 1$.*

Demostración. Se deduce del Lema 4.4(b) que $\pi(D \bullet (e_{\sigma a}, B)) = [\pi(D \bullet e_{\sigma a}), \pi(B)]$. Ahora como $\pi(D \bullet e_{\sigma a}) = [e_{\varepsilon u}, \ldots, e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}]$, se tiene que si

$$[e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}] = 0$$

entonces $\pi(D \bullet e_{\sigma a}) = 0$. Así supóngase que $[e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}] \neq 0$, sea $i > j$ el mínimo tal que $q_{ai} \neq 0$ y obsérvese que $[e_{\varepsilon i}, \ldots, e_{\varepsilon 1}, e_{\sigma a}] = 0$ por $R_5(q)$. ■

Hipótesis 4.14 *Sea q una forma unitaria positiva definida, $\Delta = (1, \ldots, u)$ una cadena llena en $B(q)$ y se fijan $1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq u$. Más aún, sean*

$$\begin{aligned} D_1 &= (e_{\varepsilon(i_1-1)}, \ldots, e_{\varepsilon 1}) \\ D_m &= (e_{\varepsilon(i_m-1)}, \ldots, e_{\varepsilon i_{m-1}}) \qquad (1 < m \leq k) \\ D_{k+1} &= (e_{\varepsilon u}, \ldots, e_{\varepsilon i_k}). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Lema 4.15 *Supóngase que se satisfacen las Hipótesis 4.14. Entonces para* $A \in \mathcal{M}(X)$ *y cada* $m \geq 3$ *se tiene que:*

$$\pi(D_m \bullet D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet A) = \pi(D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet D_m \bullet A)$$

si m *es impar, y*

$$\pi(D_m \bullet D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet A) = \pi(D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_m \bullet A)$$

si m *es par.*

Demostración. Sea $D = D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_1$ si m es impar ($D = D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2$ si m es par). Entonces se tiene que $[e_{\varepsilon i}, e_{\varepsilon j}] = 0$ para cada $e_{\varepsilon i} \in_{\text{entr}} D_m$ y cada $e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D$. Por lo tanto el resultado se sigue del Lema 4.8. ■

Hipótesis 4.16 *Sean* $B, C \in \mathcal{M}(X)$ *tales que*

$$\begin{aligned} [e_{\varepsilon j}, \pi(C)] &= 0, \quad \textit{para toda } e_{\varepsilon j} \in_{entr} D_1, \\ [e_{\varepsilon j}, \pi(D_{m-1} \bullet C)] &= 0, \quad \textit{para toda } e_{\varepsilon j} \in D_m,\ m > 1 \textit{ impar}, \\ [e_{\varepsilon j}, \pi(D_{m-1} \bullet B)] &= 0, \quad \textit{para toda } e_{\varepsilon j} \in D_m,\ m > 1 \textit{ par}. \end{aligned}$$

Lema 4.17 *Supóngase que se satisfacen las Hipótesis 4.14 y 4.16. Entonces para cada* $m \geq 2$ *y cada* $e_{\varepsilon j} \in_{entr} D_m$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} \pi(e_{\varepsilon j} \bullet D_{(m-1)} \bullet D_{(m-3)} \bullet \cdots \bullet D_3 \bullet D_1 \bullet B) &= 0 \quad \textit{si } m \textit{ is par, y} \\ \pi(e_{\varepsilon j} \bullet D_{(m-1)} \bullet D_{(m-3)} \bullet \cdots \bullet D_4 \bullet D_2 \bullet C) &= 0 \quad \textit{si } m \textit{ is impar.} \end{aligned}$$

Demostración. Supóngase que m es par (el caso donde m es impar es completamente similar) y sea $E = \pi(e_{\varepsilon j} \bullet D_{(m-1)} \bullet D_{(m-3)} \bullet \cdots \bullet D_3 \bullet D_1 \bullet B)$. Sea $D' = (e_{\varepsilon j}, D_{m-1})$. Obsérvese que para cada $x \in_{\text{entr}} D'$ y cada $y \in_{\text{entr}} C = D_{m-3} \bullet \ldots \bullet D_1$ se tiene que $[x, y] = 0$. De aquí por Lema 4.8, se tiene que $E = \pi(D' \bullet C \bullet B) = \pi(C \bullet D' \bullet B)$. El resultado se sigue ahora de que $\pi(D' \bullet B) = [e_{\varepsilon j}, \pi(D_{m-1} \bullet B)] = 0$ por hipótesis (4.16). ■

Lema 4.18 *Nuevamente, supóngase que se satisfacen las Hipótesis 4.14 y 4.16.*

(i) *Para cada par* m*, se tiene que* $\pi(D_{m+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C))$ *es igual a* $[\pi(D_{m+1} \bullet D_{m-1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B),\ \pi(D_m \bullet D_{m-2} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)]$.

(ii) *Para cada impar m, se tiene que $\pi(D_{m+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C))$ es igual a $[\pi(D_m \bullet D_{\mathrm{m}-2} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B),\ \pi(D_{m+1} \bullet D_{m-1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)]$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre m. Sea

$$E_m = \pi(D_{m+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C)).$$

Si $m = 1$, entonces

$$E_1 = \pi(D_2 \bullet D_1 \bullet (B, C)) = [e_{\varepsilon(i_2-1)}, \ldots, e_{\varepsilon i_1}, \pi(D_1 \bullet (B, C))].$$

Por hipótesis (4.16) se tiene que $[e_{\varepsilon j}, \pi(C)] = 0$ para toda $e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D_1$; se puede entonces aplicar el Lema 4.4 y así concluir que $\pi(D_1 \bullet (B, C)) = [\pi(D_1 \bullet B), C]$. Nuevamente por (4.16), para cada $e_{\varepsilon i} \in D_2$, obtenemos que $[e_{\varepsilon i}, \pi(D_1 \bullet B)] = 0$ y por lo tanto $E_1 = \pi(D_2 \bullet (D_1 \bullet B, C)) = [\pi(D_1 \bullet B), \pi(D_2 \bullet C)]$.

Para $m > 1$ impar (el caso m par es completamente similar), se tiene que

$$E_m = [e_{\varepsilon(i_{m+1}-1)}, \ldots, e_{\varepsilon i_m}, \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet (B, C))]$$

y por lo tanto por inducción

$$E_m = [e_{\varepsilon(i_{m+1}-1)}, \ldots, e_{\varepsilon i_m}, \pi(D_{(m-1)} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B), \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)].$$

Por el Lema 4.17 se tiene que $[e_{\varepsilon j}, \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)] = 0$ para toda $e_{\varepsilon j} \in_{\text{entr}} D_{m+1}$; así por Lema 4.4($b$) se obtiene que

$$E_m = [\pi(D_{m+1} \bullet D_{(m-1)} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B), \pi(D_m \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet C)],$$

lo cual finaliza la demostración. ■

El siguiente resultado técnico es una herramienta importante en la demostración del Lema 3.5.

Hipótesis 4.19 *Se tiene que $\pi(D_{k+1} \bullet C) = 0$ (resp. $\pi(D_{k+1} \bullet B) = 0$) si k es impar (resp. k es par).*

Lema 4.20 *Si se satisfacen las Hipótesis 4.14, 4.16 y 4.19, entonces*

$$\pi(D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet (B, C)) = 0.$$

Demostración. Sea $E = \pi(D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet (B, C))$. Si $k = 1$ entonces, por Lema 4.18, se tiene que $E = [\pi(D_1 \bullet B), \pi(D_2 \bullet C)]$ y el resultado se sigue directamente de la Hipótesis 4.16.

Si $k > 1$ (se supondrá que k es par, el caso impar es similar) entonces se sigue del Lema 4.18 que

$$E = [\pi(D_{k+1} \bullet D_{k-1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B),\ \ \pi(D_k \bullet D_{k-2} \cdots \bullet D_2 \bullet C)].$$

Usando el Lema 4.15 obtenemos que

$$\pi(D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet B) = \pi(D_{k-1} \bullet \cdots \bullet D_1 \bullet D_{k+1} \bullet B)$$

y el resultado se sigue de que $\pi(D_{k+1} \bullet B) = 0$. ■