Capítulo 5

Demostración del Lema 3.5

Recordemos que q es una forma unitaria positiva definida, la cual contiene a una de las bigráficas $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$, $\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l)$ o $\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l)$. En particular $(1, \ldots, n)$ es una cadena llena en $B(q)$ y se denota por $1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq n$ a los vértices de $(1, \ldots, n)$ que están enlazados con μ.

La demostración del Lema 3.5 para los casos

$$\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l),$$

$$\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l),$$

se hará de forma simultanea. Sin embargo la demostración para el caso $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$ se considerará aparte, pues es muy distinta a la de los dos casos anteriores.

5.1. Estrategia para $\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l)$ y $\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu; i_1, \ldots, i_l)$

Nuevamente se denotará por Γ la sub-bigráfica de $B(q)$ dada por los vértices $\lambda, \mu, 1 \ldots, n$. Se tiene así que

$$\Gamma = \mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu, i_1, \ldots, i_l) =: \mathbf{g}^1 \text{ o bien } \Gamma = \mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu, i_1, \ldots, i_l) =: \mathbf{g}^2$$

y se quiere mostrar que los monomios $F = F_{n,v}$, definidos en el Lema 3.5, son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$ para $0 \leq v \leq n$.

En la demostración se distinguen los siguientes casos.

I: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $i_k \leq u < i_{k+1}$ para algún entero positivo *par* $k < l$.

II: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $i_k \leq u < i_{k+1}$ para algún entero *impar* $k < l$.

III: $\Gamma = \mathbf{g}^1$ y $i_l \leq u < n$.

IV: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $1 \leq u < i_1$.

V: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $u = n$.

VI: $\Gamma = \mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2$ y $u = 0$.

El último caso es muy fácil. En efecto, dado que en este caso existe un número par de vértices de $\Delta(1, 2, \ldots, n)$ enlazados con λ y μ, se tiene entonces que $[e_{-\alpha}, e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1] = 0$ para $\alpha = \lambda, \mu$ y por lo tanto $F = F_{n,0} = 0$.

Los casos restantes son más difíciles. Sin embargo, dado que en cada caso el procedimiento es muy similar, se describe aquí un esquema común de argumentos en tres pasos, como sigue.

Primer paso: En cada caso se hacen ciertas definiciones y se verifican algunas igualdades.

I: Se definen $B_1 = (e_{-i_{k+1}}, \ldots, e_{-(u+1)})$ y $C_1 := (e_{-n}, \ldots, e_{-(i_{k+1}+1)})$. Más aún, sean $B = (e_\lambda, B_1)$ y $C = (e_\mu, C_1)$. Se muestra que (i) $[e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)] = 0$, (ii) $[e_\lambda, \pi(C_1)] = 0$ y que (iii) $[e_\mu, \pi(B)] = 0$.

II: Se definen $B_1 = (e_{-n}, \ldots, e_{-(i_{k+1}+1)})$ y $C_1 := (e_{-i_{k+1}}, \ldots, e_{-(u+1)})$. Más aún, se definen $B = (e_\mu, B_1)$ y $C = (e_\lambda, C_1)$ (en el caso $\Gamma = \mathbf{g}^2$ con $k = l - 1$, se toman $C_1 = 1 \in \mathcal{M}(X)$ y $C = e_\lambda$). Se muestra que (i) $[e_\lambda, \pi(B_1 \bullet C_1)] = 0$, (ii) $[e_\mu, \pi(B_1)] = 0$ y (iii) $[e_\lambda, \pi(C)] = 0$.

III: Se definen $B_1 = (e_{-n}, \ldots, e_{-(u+1)})$, $B = (e_\lambda, B_1)$ y $C = e_\mu$. Entonces se demuestra que (i) $[e_\mu, \pi(B_1)] = 0$.

IV: Se definen $B_1 := (e_{-i_1}, \ldots, e_{-(u+1)})$ y $C_1 := (e_{-n}, \ldots, e_{-(i_1+1)})$ y entonces se definen $B = (e_\lambda, B_1)$, $C = (e_\mu, C_1)$. Luego se prueba que (i) $[e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)] = 0$, (ii) $[e_\lambda, \pi(C_1)] = 0$ y (iii) $[e_\mu, \pi(B)] = 0$.

V: Se definen $B = e_\lambda$, $C = e_\mu$ y no se demostrarán igualdades en este paso.

Segundo paso: En todos los casos se demuestra que

$$F = \pm\pi(D \bullet (B, C))$$

donde $D = D_{k+1} \bullet D_k \bullet \ldots \bullet D_1$ y los $D_i \in \mathcal{M}(X)$ son como en las Hipótesis 4.14, y se toma $k = 0$ en el caso IV y $u = n$, $k = l$ en el caso V.

Tercer paso: Se muestra que en todos los casos, las Hipótesis 4.16 y 4.19 se satisfacen y que consecuentemente $F = 0$ por Lema 4.20.

5.2. Demostración del primer paso

Primero se verificará el caso I para mostrar (i), sea $\Delta = (u+1, \ldots, n)$. Los vértices de la cadena llena Δ que están enlazados con μ son $i_{k+1}, \ldots, i_l$, dado que el conjunto $\mathrm{L}_\mu(\Delta)$ tiene cardinalidad par, se tiene que $[e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)] = 0$, por Lema 4.12

Para ver la propiedad (ii), sea $\Delta = (i_{k+1} + 1, \ldots, n)$. Si $\Gamma = \mathbf{g}^1$ se toma $\mathrm{L}_\lambda(\Delta) = \{i_{k+2}, \ldots, i_l, n\}$ que tiene cardinalidad par, y si $\Gamma = \mathbf{g}^2$ entonces se toma $\mathrm{L}_\lambda(\Delta) = \{i_{k+2}, \ldots, i_{l-1}\}$ que también tiene cardinalidad par. En cada caso, (ii) se sigue del Lema 4.12.

Para (iii), obsérvese que $[e_\lambda, e_j] = 0$ y $[e_\mu, e_j] = 0$ (para $u+1 \leq j < i_{k+1}$) y por lo tanto $[e_\lambda, \pi(A)] = [e_\mu, \pi(A)] = 0$, donde $A = (e_{-\varepsilon(i_{k+1}-1)}, \ldots, e_{-(u+1)})$. Tenemos que

$$[e_\mu, \pi(B)] = [e_\mu, e_\lambda, e_{-i_{k+1}}, \pi(A)] = [e_\mu, \pi(A), e_{-i_{k+1}}, e_\lambda] = [\pi(A), e_\mu, e_{-i_{k+1}}, e_\lambda],$$

el cual es cero puesto que $[e_\mu, e_{-i_{k+1}}, e_\lambda] = 0$ por $\mathrm{R}_5(q)$.

Para ver la propiedad (i) en el caso II, se define $\Delta = (u + 1, \ldots, n)$. Si $\Gamma = \mathbf{g}^1$, se tiene que $\mathrm{L}_\lambda(\Delta) = \{i_{k+1}, \ldots i_l, n\}$ y si $\Gamma = \mathbf{g}^2$, se tiene que $\mathrm{L}_\lambda(\Delta) = \{i_{k+1}, \ldots i_{l-1}\}$. En cada caso el conjunto $\mathrm{L}_\lambda(\Delta)$ tiene cardinalidad par y por el Lema 4.12 se cumple (i).

Para (ii), obsérvese que para $\Delta = (i_{k+1} + 1, \ldots, n)$ el conjunto $\mathrm{L}_\mu(\Delta) = \{i_{k+2}, \ldots, i_l\}$ tiene cardinalidad par, puesto que k es impar, y (ii) se sigue nuevamente por Lema 4.12. La propiedad (iii) en el caso II se prueba como en el caso I.

La propiedad (i) en el caso II es trivial ya que no hay vértices de $\Delta = (u + 1, \ldots, n)$ enlazados con λ.

En el caso IV, sea $\Delta = (u+1, \ldots, n)$ y obsérvese que $\mathrm{L}_\mu(\Delta) = \{i_1, \ldots, i_l\}$ tiene cardinalidad par. De aquí, se tiene que (i) se cumple por Lema 4.12. De forma similar, si $\Delta = (i_1 + 1, \ldots, n)$ entonces $\mathrm{L}_\lambda(\Delta) = \{i_2, \ldots, i_l, n\}$ (resp. $\mathrm{L}_\lambda(\Delta) = \{i_2, \ldots, i_{l-1}\}$) en el caso donde $\Gamma = \mathbf{g}^1$ (resp. $\Gamma = \mathbf{g}^2$). En ambos casos el conjunto $\mathrm{L}_\lambda(\Delta)$ tiene cardinalidad par y nuevamente usando el Lema 4.12 se deduce que (ii) se cumple. La propiedad (iii) en el caso IV, se demuestra como se mostró (iii) en el caso I. ■

5.3. Demostración del segundo paso

Sea $D = D_{k+1} \bullet \cdots \bullet D_2 \bullet D_1$, donde los D_i son como en las Hipótesis 4.14.

Casos I y IV: Por definición, se tiene que $F = [e_u, \ldots, e_1, G]$ donde $G = [[e_\lambda, e_\mu], \pi(C_1 \bullet B_1)]$. Por Lema 4.2 y antisimetría se deduce de la propiedad (i) que $G = -[e_\lambda, e_\mu, \pi(C_1 \bullet B_1)]$. Ahora, se deduce del Lemma 4.9 que $G = -[e_\mu, e_\lambda, \pi(C_1), \pi(B_1)]$. Nuevamente por Lema 4.2,se deduce de la propiedad (ii) que $G = -[e_\mu, \pi(C_1), e_\lambda, \pi(B_1)] = -[e_\mu, \pi(C_1), \pi(B)]$. Así, se obtiene de la propiedad (iii) y del Lema 4.2 que $G = [\pi(B), e_\lambda, \pi(C_1)] = [\pi(B), \pi(C)]$. Finalmente, substituyendo G en F se obtiene que

$$F = [e_u, \ldots, e_1, \pi(B), \pi(C)] = \pm\pi(D \bullet (B, C)).$$

La demostración en el caso II es idéntica a la anterior, intercambiando B_1 con C_1, λ con μ y C con B.

En el caso III se tiene por definición $F = [e_u, \ldots, e_1, G]$, donde $G = [[e_\lambda, e_\mu], \pi(B_1)]$. Ahora, por la propiedad (i) y 4.2, se tiene que

$$G = [[\pi(B_1), e_\beta], e_\alpha] = [e_\alpha, e_\beta, \pi(B_1)] = [\pi(C), \pi(B)] = -[\pi(B), \pi(C)].$$

Por lo tanto $F = \pm\pi(D \bullet (B, C))$.

El Caso V es trivial puesto que $F = \pi(D \bullet (C, B)) = -\pi(D \bullet (B, C))$. ■

5.4. Demostración del tercer paso.

Caso I. Para cada $e_j \in D_1$ (es decir, $1 \leq j < i_1$) se tiene que $[e_j, \pi(C_1)] = 0$ y $[e_j, e_\mu] = 0$ puesto que $q_{j\mu} \geq 0$. Por lo tanto $[e_j, \pi(C)] = 0$. De forma similar para cada m par con $1 < m < k$ y para $e_j \in D_m$, se tiene que $[e_j, \pi(C)] = 0$. Si $j > i_{m-1}$ entonces $[e_j, \pi(D_{m-1})] = 0$. Por lo tanto $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet C)] = 0$; si $j = i_{m-1}$ entonces sea $D' = D_{m-1} \bullet e_\mu$. Así, $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet C)] = [e_j, \pi(D' \bullet C)] = [\pi(e_j \bullet D'), \pi(C_1)$ por 4.4(b). Por Lema 4.12(b), se obtiene la segunda afirmación de las Hipótesis 4.16.

Para cada número par m con $1 < m \leq l$ y cada $e_j \in D_m$ se tiene que $[e_j, \pi(B)] = 0$ puesto que $[e_j, e_\lambda] = 0$ y $[e_j, \pi(B_1)] = 0$. De manera similar al caso cuando m es impar, se concluye que $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet B)] = 0$. Esto muestra que las Hipótesis 4.16 se cumplen. Para verificar las Hipótesis 4.19, se usa que $[e_j, e_{-i}] = 0$ para cada $e_j \in_{\text{entr}} D_{k+1}$ y cada $e_{-i} \in_{\text{entr}} C_1$ y también que

$[e_j, e_\mu] = 0$ ya que $q_{j\mu} \geq 0$; así se concluye que $[e_j, \pi(C)] = 0$ para cada $e_j \in_{\text{entr}} D_{k+1}$ y consecuentemente $\pi(D_{k+1} \bullet C) = 0$.

Caso II. El argumento es completamente similar al Caso I.

Caso III. Para $e_j \in_{\text{entr}} D_1$, se tiene que $[e_j, \pi(C)] = 0$ puesto que $q_{j\mu} \geq 0$. Si m es impar y $e_j \in_{\text{entr}} D_m$, entonces nuevamente $[e_j, \pi(C)] = 0$ por la misma razón. Para $j > i_{m-1}$, se tiene directamente que $[e_j, \pi(D_{m-1} \bullet C)] = 0$, mientras que si $j = i_{m-1}$ se puede aplicar el Lema 4.12(b) y obtener lo mismo. De forma similar se da un argumento para cuando m es par.

Caso IV. Aquí se tiene que $D = D_1 = [e_u, \ldots, e_1]$ y por lo tanto para cada $e_j \in_{\text{entr}} D_1$ obtenemos que $[e_j, e_\mu] = 0$ puesto que $q_{j\mu} = 0$. Consecuentemente $[e_j, \pi(C)] = 0$ y no hay nada que demostrar para las Hipótesis 4.16 y las Hipótesis 4.19 puesto que en este caso $k + 1 = 1$.

Caso V. Se tiene que $k = l$ y $D_{k1} = (e_n, \ldots, e_{i_l})$, el cual se reduce a $D_{k+1} = e_n$ en el caso $\Gamma = \mathbf{g}^2$. Así, las Hipótesis 4.16 se verifican como en el caso I y las Hipótesis 4.19 se deducen de que $[e_j, e_\mu] = 0$ para $e_j \in D_{k+1}$ de que $q_{j\mu} \geq 0$. ■

5.5. Monomios cero en las bigráficas $\mathfrak{g}_n^0(\lambda)$

Se recuerda que aquí $\Gamma = \mathbf{g}^0$ y se tiene que demostrar que los monomios

$$F_{n,u}(\lambda, n) = [e_u, \ldots, e_1, [e_\lambda, e_n], e_{-n}, \ldots, e_{-(u+1)}]$$

son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$ para $0 \leq u \leq n$.

Primero se analizará el caso donde $0 \leq u < n$. Entonces se tiene que $F_{n,u}(\lambda, n) = [e_u, \ldots, e_1, G]$, donde

$$G = [[e_\lambda, e_n], e_{-n}, \ldots, e_{-(u+1)}]$$

Aplicando el Lema 3.4 se obtiene que

$$G = \pm[[e_\lambda, e_n], e_{-n}, \ldots, e_{-(u+1)}]^{\leftarrow} = [u_{-(u+1)}, \ldots, e_{-n}, e_\lambda, e_n].$$

Reemplazando

$$[e_{-n}, e_\lambda, e_n] = [e_\lambda, e_{-n}, e_n] = [e_\lambda, h_n] = e_\lambda$$

en la expresión de arriba concluimos que

$$G = \pm[[e_\lambda, e_n], e_{-n}, \ldots, e_{-(u+1)}]^{\leftarrow} = [u_{-(u+1)}, \ldots, e_{-(n-1)}, e_\lambda]$$

lo cual es cero por $\mathrm{R}_5(q)$.

Resta el caso donde $u = n$. Obsérvese que

$$G = [e_n, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \ldots, e_1, e_\lambda]$$

es igual a cero en $\mathfrak{g}_5(q)$. En efecto,

$$G = [e_n, [e_{n-1}, e_n], e_{n-2}, e_{n-3}, \ldots, e_1, e_\lambda],$$

puesto que $[e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_1, e_\lambda] = 0$ por $\mathrm{R}_5(q)$. Por lo tanto,

$$G = [[e_{n-1}, e_n], e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \ldots, e_1, e_\lambda],$$

ya que $[e_n, e_{n-1}, e_n] = 0$ por $\mathrm{R}_4(q)$. Finalmente, se tiene que

$$G = -[[e_n, e_{n-1}], e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \ldots, e_1, e_\lambda]$$

por antisimetría y entonces $G = -[e_n, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \ldots, e_1, e_\lambda] = G$, ya que $[e_n, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \ldots, e_1, e_\lambda] = 0$ por $\mathrm{R}_4(q)$. Es decir, se tiene que $G = -G$ y por lo tanto $G = 0$.

Ahora, $F_{n,n}(\lambda, n) = [e_n, \ldots, e_1, [e_\lambda, e_n]] = -[e_n, \ldots, e_1, e_n, e_\lambda]$ por antisimetría y usando que $[e_i, e_n] = 0$ (para $i < n-1$), se concluye finalmente que

$$F_{n,n}(\lambda, n) = -[e_n, e_{n-1}, e_n, e_{n-2}, e_{n-3}, \ldots, e_1, e_\lambda] = G = 0.$$

$\blacksquare$