Abstract

Every semisimple Lie algebra defines a root system on the dual space of a Cartan subalgebra and defines a Cartan matrix, which expresses the dual of the Killing's form on a roots base. Serre's Theorem gives then a representation of the given Lie algebra by generators and relations in terms of the Cartan matrix. In this thesis, we generalize Serre's Theorem to give an explicit representation by generators and relations for any simply laced semisimple Lie algebra in terms of a positive quasi-Cartan matrix. Such a quasi-Cartan matrix expresses the dual of the Killing form for a $\mathbb{Z}$-base of roots. Here, by a $\mathbb{Z}$-base of roots, we mean a set of linearly independent roots which generate all roots as linear combinations with integral coefficients.

Resumen

Cada álgebra de Lie semisimple define un sistema de raíces sobre el espacio dual de una subálgebra de Cartan y una matriz de Cartan, que expresa el dual de la forma de Killing sobre una base de raíces. Entonces, el teorema de Serre da una representación del álgebra de Lie mediante generadores y relaciones en términos de la matriz de Cartan. En esta tesis, generalizamos el teorema de Serre con el objetivo de dar una representación explícita para cualquier álgebra de Lie semisimple asociada a una matriz cuasi-Cartan positiva, mediante generadores y relaciones. Dicha matriz cuasi-Cartan expresa el dual de la forma de Killing para una $\mathbb{Z}$-base de raíces. Con una $\mathbb{Z}$-base de raíces nos referimos a un conjunto de raíces linealmente independientes que generan todas las raíces como combinaciones lineales con coeficientes enteros.

Introducción

Una *forma unitaria* es una forma cuadrática $q : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}$, tal que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \sum_{i<j} q_{ij} x_i x_j,$$

donde los coeficientes q_{ij} son números enteros. Cada forma unitaria

$$q : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z},$$

tiene asociada una *matriz casi-Cartan* A, dada por

$$A_{ij} = q(c_i + c_j) - q(c_i) - q(c_j) = q_{ij} = A_{ji}$$

donde $c_1, \ldots, c_N$ es la base canónica de $\mathbb{Z}^N$. Si $A_{ij} \leq 0$ para toda $i \neq j$, entonces A es una *matriz de Cartan*. Si q es una forma unitaria positiva, entonces existe una transformación $\mathbb{Z}-$invertible $T : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}^N$ tal que $q \circ T = q_\Delta$; donde Δ es el *tipo de Dynkin* asociado, es decir, una unión disjunta de diagramas de Dynkin $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$ y $\mathbb{E}_n$.

Sea $\mathfrak{g}_4(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, e_{-i}, h_i $(1 \leq i \leq N)$ y las relaciones

$R_1(q)$ $[h_i, h_j] = 0$ para toda i, j,

$R_2(q)$ $[h_i, e_{\varepsilon j}] = -\varepsilon A_{ij} e_{\varepsilon j}$, para toda i, j, y donde $\varepsilon = \pm 1$,

$R_3(q)$ $[e_{\varepsilon i}, e_{-\varepsilon i}] = \varepsilon h_i$ para toda i, y donde $\varepsilon = \pm 1$,

$R_4(q)$ $(\mathbf{ad}\ e_{\varepsilon i})^{1+n}(e_{\delta j}) = 0$, donde $n = \max\{0, -\varepsilon\delta A_{ij}\}$ con $\varepsilon, \delta = \pm 1$ y $1 \leq i, j \leq n$.

Teorema 1 [SER] *Si q es una forma unitaria positiva definida tal que su matriz casi-Cartan es una matriz de Cartan, entonces $\mathfrak{g}_4(q)$ es un álgebra de Lie semisimple (y de dimensión finita).*

En general, si A no es necesariamente una matriz de Cartan, las relaciones $\mathrm{R}_4(q)$ son un subconjunto de las relaciones

$\mathrm{R}_\infty(q)$ $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$ si $q(\sum_{j=1}^{t} \varepsilon_j c_{i_j}) > 1$ y $\varepsilon_j = \pm 1$,

donde los monomios $[x_1, x_2, \ldots, x_t]$ se definen de manera inductiva por medio de $[x_1, x_2, \ldots, x_t] = [x_1, [x_2, \ldots, x_t]]$.

Sea $\mathfrak{g}_\infty(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, e_{-i}, h_i $(1 \leq i \leq N)$ y las relaciones $\mathrm{R}_1(q)$, $\mathrm{R}_2(q)$, $\mathrm{R}_3(q)$ y $\mathrm{R}_\infty(q)$. Recordar que cada forma unitaria positiva definida tiene un único *tipo de Dynkin* Δ asociado, tal que q es *equivalente* a q_Δ, es decir, que $q = q_\Delta \circ T$ para alguna matriz entera T $\mathbb{Z}$-invertible. Con $q \sim q'$ se denotará que cualesquiera dos formas unitarias q y q' son equivalentes.

Teorema 2 [BKL] *Si q es positiva definida de tipo Dynkin Δ, entonces $\mathfrak{g}_\infty(q)$ es isomorfa a $\mathfrak{g}_4(q_\Delta)$.*

Aún cuando el conjunto de relaciones $\mathrm{R}_\infty(q)$ es un conjunto infinito, en [BKL, Proposición 6.6] se demostró que existe un subconjunto finito S de $\mathrm{R}_\infty(q)$, el cual es suficiente para definir $\mathfrak{g}_\infty(q)$. Sin embargo, este subconjunto no es del todo satisfactorio, puesto que S es muy grande y su definición depende fuertemente de la factorización de la matriz T.

El objetivo de este trabajo es dar un conjunto finito más simple y explícito de relaciones, para el cual el álgebra de Lie definida sea isomorfa a $\mathfrak{g}_4(q_\Delta)$. Este conjunto incluirá las relaciones $\mathrm{R}_1(q)$, $\mathrm{R}_2(q)$, $\mathrm{R}_3(q)$, $\mathrm{R}_4(q)$ y se añadirán algunas relaciones $\mathrm{R}_5(q)$ que dependen del conjunto de *ciclos* en q. Un *ciclo* es una tupla de indices $(i_1, \ldots, i_t)$ tal que $q_{i_a i_b} \neq 0$ si y sólo si $a - b \equiv \pm 1 \mod t$. Se define

$\mathrm{R}_5(q)$ $[e_{\varepsilon_1 i_1}, \ldots, e_{\varepsilon_t i_t}] = 0$, donde $(i_1, \ldots, i_t)$ es un ciclo en q y $\varepsilon_t = \pm 1$, $\varepsilon_l = -q_{i_l, i_{l+1}} \varepsilon_{l+1}$ para $1 \leq l \leq t-1$.

Sea $\mathfrak{g}_5(q)$ el álgebra de Lie definida por los generadores e_i, e_{-i}, h_i $(1 \leq i \leq N)$ y por las relaciones $\mathrm{R}_1(q)$, $\mathrm{R}_2(q)$, $\mathrm{R}_3(q)$, $\mathrm{R}_4(q)$ y $\mathrm{R}_5(q)$. Obsérvese que todos estos conjuntos son finitos y están dados de una forma combinatoria.

El siguiente teorema es el resultado principal de este trabajo.

Teorema 3 *Sean q y q' formas unitarias positivas definidas. Entonces*

(i) $q \sim q'$ *si y sólo si* $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_5(q')$,

(ii) $\mathfrak{g}_5(q) \simeq \mathfrak{g}_4(q_\Delta)$, *donde* Δ *es el tipo de Dynkin de* q.

Como se verá en el capítulo dos de este trabajo, para la demostración de este teorema bastará analizar los siguientes casos, $q' = q \circ T_{sr}^{\sigma}$ y $q' = q \circ I_r$, donde T_{sr}^{σ} será una deflación o una inflación, y donde I_r representará un cambio de signo.
Un paso importante es mostrar que si $q' = q \circ I_r$, entonces los elementos

$$\widetilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} e_{-\varepsilon r}, & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r \end{cases} \qquad \widetilde{h}_i = \begin{cases} -h_r, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r \end{cases}$$

satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_5(q')$. Una vez demostrado esto, se harán reducciones a casos especiales.

Una de estas reducciones es la siguiente. Primero se mostrará que si $q' = q \circ T_{sr}^{+}$, entonces los elementos

$$\widetilde{e}_{\varepsilon i} = \begin{cases} [e_{\varepsilon r}, e_{\varepsilon s}], & \text{si } i = r \\ e_{\varepsilon i}, & \text{si } i \neq r, \end{cases} \qquad \widetilde{h}_i = \begin{cases} h_r + h_s, & \text{si } i = r \\ h_i, & \text{si } i \neq r. \end{cases}$$

satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_5(q')$. Luego el caso $q' = q \circ T_{sr}^{-}$ se obtendrá como una implicación del caso $q' = q \circ T_{sr}^{+}$.
Verificar que los elementos anteriormente mencionados satisfacen las relaciones $R_1(q') - R_4(q')$, no es complicado. Lo realmente complicado es verificar que estos elementos satisfacen la relación $R_5(q')$. Para demostrar esto, se analizarán todos los casos posibles en los que pueda aparecer un ciclo en q'. En el capítulo tres, en la Sección 3.1 se mostrará que todo ciclo en q' proviene de alguna de las bigráficas $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$, $\mathbf{g}_n^1(\lambda, \mu, i_1, \ldots, i_l)$ (para algún l par) ó $\mathbf{g}_n^2(\lambda, \mu, i_1, \ldots, i_l)$ (para algún $l > 0$ par) en $B(q)$. Una vez probado esto, la parte fundamental de la demostración es verificar que los siguientes monomios son cero en $\mathfrak{g}_5(q)$ (en el caso $\mathbf{g}_n^0(\lambda)$ se supone que $\mu = n$):

$$F_{n,0}(\lambda, \mu) = [[e_\lambda, e_\mu], e_{-n}, e_{-(n-1)}, \ldots, e_{-1}]$$

y para $u = 1, \ldots, n$

$$F_{n,u}(\lambda, \mu) \;\; := \;\; [e_u, e_{u-1}, \ldots, e_1, [e_\lambda, e_\mu], e_{-n}, \ldots, e_{-(u+1)}].$$

Para demostrar que los monomios $F_{n,u}(\lambda, \mu)$ son cero, en el capítulo cuatro, se define un nuevo producto de monomios y se muestran algunas resultados técnicos que facilitan la demostración. Finalmente, como se mostrará en el capítulo cinco, el resultado principal de este trabajo será una consecuencia de los resultados que se obtienen en los capítulos dos, tres y cuatro.

Quiero agradecerle a mi tutor, el Dr. Michael Barot por haberme brindado una oportunidad justo cuando más necesitaba de una, además le quiero agradecer todas sus enseñanzas, pues he aprendido muchas cosas trabajando con él.
Por otra parte quiero agradecerle y dedicarle este trabajo a mi compañera de vida, mi esposa Malena, quien con su apoyo, paciencia, amor y carácter inquebrantable, me ha enseñado que para salir de cualquier obscuro pozo basta con un poco de determinación.